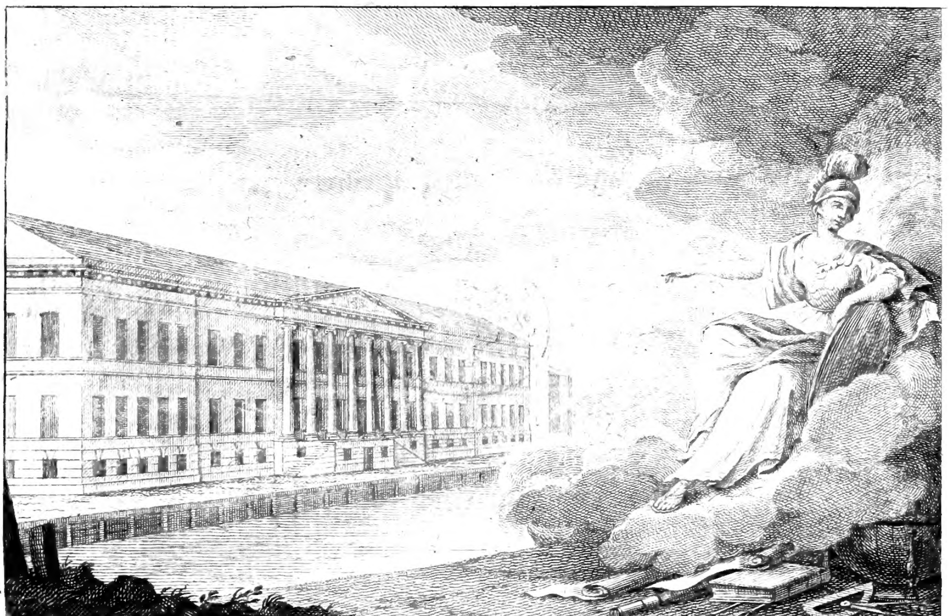
NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS III.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXV.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVIII.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXV.

Avec IV. Planches.

HISTOIRE. Pag.

)(2 Ouvra-

SUP-

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS III.

Cum VII. Tabulis aeri incisis.

PHY-

Pag.

PHYSICO-MATHEMATICA

PHYSICA

ASTRONOMICA

HIS-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉE MDCCLXXXV.

En cette année commencerent les cours publics que Madame la Princeſſe de Daſchkaw avoit fondés l'année paſſée, & pour lesquels elle avoit dépoſé à la banque, comme il a été dit dans l'hiſtoire du ſecond volume de ces nouveaux Actes, une épargne de 30 mille roubles. Il y en devoit avoir quatre, mais il n'y en eut cette année que deux, parce qu'il ne ſe préſentoit pas plus d'Académiciens de la Nation dont les occupations leur permirent de s'en charger. Le premier d'entre eux fut M. le Conſeiller de Cour & Académicien Kotelnikof, qui pendant les mois d'été donna dans le grand Auditoire du College académique, des leçons de Mathématique élémentaire. L'autre M. le Conſeiller de Cour & Adjoint Socolof expliqua pendant ce même intervalle de temps la Chymie, & démontra dans le Laboratoire académique les principaux procédés de cette ſcience. Ils s'acquitterent l'un & l'autre de cette nouvelle fonction de lecteurs publics avec le plus heureux ſuccès & à la grande ſatisfaction des Auditeurs, dont le nom-

bre

bre fut ſouvant ſi grand, qu'ils ne trouvoient pas aſſés de places dans les ſalles où ces leçons ſe donnoient.

M. l'Académicien & Conſeiller de Cour Inohodzof revint le 17 Septembre de ſon voyage aſtronomique, qui a duré au-delà de quatre ans, pendant lesquels il a déterminé avec un degré de préciſion ſuffiſante, la poſition de 14 endroits de l'Empire: dont les quatre derniers, où il a obſervé en cette année, ſont Jaroslavl', Koſtroma, Wologhda' & Petroſawodsk'. M. Inohodzof en rendit un compte final à l'Académie, & après avoir remis entre les mains de M. le Conſeiller de Cour Roumofski tous les inſtrumens qu'il avoit eus en voyage, Madame la Princeſſe lui confia le Cabinet, que feu M. Lexell avoit eu à l'Obſervatoire & ordonna de lui fournir un choix d'inſtrumens néceſſaires pour continuer à obſerver les phénomènes & mouvemens céleſtes.

Madame la Princeſſe fit partir cette année deux nouvelles expéditions académiques, mais qui ne durerent que quelques mois, & qui finirent l'une & l'autre encore avant l'hyver. La premiere fut aſtronomique: elle fut envoyée par ordre ſpécial de Sa Majeſté l'Impératrice, pour déterminer la ſituation géographique des principaux endroits de la Tauride. Le choix de Madame la Princeſſe tomba ſur M. le Conſeiller Tſchernoi, Adjoint au département Géographique: obſervateur habile & éléve de M. le Conſeiller de Cour Roumofski, qui déja en 1769 avoit accompagné feu M. le Capitaine Islenief à Yakoutzk', où il avoit fait conjointement avec cet aſtronome l'obſervation du paſſage de Venus devant le disque du Soleil. L'Académie lui donna un éléve pour aide & un horloger méchanicien pour réparer les inſtrumens en cas d'accident. M. Roumofski le munit d'une inſtruction détaillée, approuvée par l'Académie, & il partit en Avril. Encore avant d'ard'arriver à Pérecop, un ouragan endommagea presque tous ses instrumens & surtout le quart-de-cercle, qui eut besoin d'une réparation considérable; de sorte que notre Astronome ne put atteindre que vers la fin de Juin, ce premier endroit de sa destination, pour y observer la latitude: de là il passa à Eupatoria (ou *Keslof*), Sebastropol, Théodosia (ou *Kefa*) & Yenikala, où il fit les observations astronomiques requises pour la détermination de leur positions géographiques. Ensuite il passa dans le Gouvernement de Caucase, & s'arréta à Mosdoc & Ekaterinograd; de là il partit pour Stawropol sur la ligne de Mosdoc, où il eut le malheur d'être surpris & pillé par une troupe de brigands Lesgiens, qui tuerent un Cosaque de sa suite & en blesserent deux, & qui après avoir brisé divers instrumens, enléverent avec eux son élève nommé Arnoldi, qui depuis n'a plus reparu, & que toutes les perquisitions n'ont pu faire recouvrer jusqu'ici. Ce nouvel accident & sa santé délabrée ne lui permirent plus de continuer à faire les observations qui lui resterent encore: il se rendit à Tscherkaski & retourna d'ici par Moscou à St. Pétersbourg, où il revint vers la fin de l'année.

L'autre expédition eut pour objet une description physique des côtes & des environs des lacs de Ladoga & d'Onega. Ce fut M. le Conseiller de Cour Ozeretskovski qui l'entreprit par ordre de Madame la Princesse: il s'embarqua le 10 de Juin, & après avoir fait quelque sejour à Serdopol, Olonez, Powénez, Ladunepol & Petrosawodsk, d'où il adressa à l'Académie ses rapports concernant le succès de ses recherches en Physique & Histoire naturelle, il revint à St. Pétersbourg le 26 Septembre, chargé d'une recolte considérable pour le Musée Académique.

Madame la Princesse fit un choix de quatre éléves académiques, qu'elle envoya à Göttingue pour y faire leurs études & se préparer à pouvoir quelque jour occuper dignement des places à l'Académie. On leur donna des instructions & divers Académiciens y joignirent des lettres de recommandation adressées à Mrs. les Professeurs de l'Université dont ils doivent fréquenter les leçons. Ils partirent en Juillet.

Madame la Princesse de Daschkaw fit cette année des gratifications considérables pour améliorer le sort des personnes attachées à l'Académie. Elle augmenta les appointemens du Secrétaire, de Mrs. les Académiciens Wolff, Inohodzof, Fuss & de l'Adjoint Socolof: elle accorda enfin à M. le Conseiller de Cour Hablitzl', Correspondant de l'Académie à Simpheropol en Tauride, la pension académique de deux cent roubles.

Mrs. le Conseiller de Collèges Pallas & le Conseiller de Cour Stritter à Moscou furent le 22 Septembre, jour de l'anniversaire du Couronnement de Sa Majesté l'Impératrice, decorés de l'Ordre de St. Wolodimer de la 4e Classe.

M. le Professeur Ferber ayant représenté la nécessité de faire un tour en Suede pour y regler quelques affaires de famille, Madame la Princesse lui accorda un congé de quatre mois, qu'elle prolongea ensuite encore d'un mois. M. Ferber partit en conséquence le 24 Février & revint le 31 Juillet.

Le 13 Juin, Madame la Princesse ayant jugé à propos de faire une exception à la regle prescrite, de ne pas recevoir de de membre étranger, avant qu'il n'y eut six vacances (*), elle fit proposer pour être agréés dans cette classe d'associés

M. l'Abbé Rochon, des Académies royales des Sciences & de la marine de Paris: Garde du Cabinet de Physique du Roi, à Paris.

M. Jean Vivencio, Premier Médecin de S. M. le Roi des deux Siciles & Chevalier de l'Ordre royal & militaire de St. George: de l'Académie de Médecine de Paris, & de la Société patriotrique de Milan, à Naples.

L'Assemblée ayant acquiescé aux raisons que Madame la Princesse leur chef avoit données en faveur de ces deux recipiendaires, elle passa au recueil des voix, & l'agrégation se fit unanimement.

Une autre reception de Correspondant étranger ne se fit pas moins unanimement dans l'Assemblée du 28 Novembre: celle de

M. Jean-Elert Bode, Astronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Prusse à Berlin

qui s'est distingué par son zéle pour le progrès des connoissances astronomiques, & qui s'est toujours prêté avec complaisance à communiquer à l'Académie toutes les observations & nouveautés qui parviennent à sa connoissance.

L'Académie célébra le 27 Décembre le soixantieme anniversaire de sa fondation, par une assemblée publique, à laquelle

(*) Histoire de 1784. pag. 6.

laquelle elle avoit fait inviter tous ses membres honoraires, ainsi que les plus notables personnes de la ville.

Madame la Princesse de Daschkaw, exerçant les fonctions de sa présidence, ouvrit la séance par un discours rélatif à la circonstance. Le Secrétaire rapporta ensuite ce qui concernoit les questions que l'Académie a proposées pour les Prix des années précédentes.

Celle sur laquelle le jugement devoit être prononcé dans cette Assemblée, avoit pour objet une classification exacte & naturelle des divers fossiles dont les couches qui forment la surface de notre globe sont composées. L'Académie décerna le Prix au mémoire allemand qui avoit pour devise: *Avulsa saxa saxis.* Le billet cacheté ayant été ouvert, on y trouva le nom de M. Charles Haidinger, Garde-Adjoint du Cabinet des Curiosités naturelles de S. M. Impériale à Vienne. Deux autres mémoires obtinrent l'accessit: l'un en françois, désigné par la dévise: *Sane multum illi egerunt qui ante nos fuerunt, sed non peregerunt: multum adhuc restat operis, multumque restabit:* où la classification des diuerses espèces de terres, de pierres est rangée dans un ordre fort systematique; indiquant deplus les principaux lieux, où l'on trouve les plus remarquables de ces productions. L'autre mémoire françois, dont l'épigraphe est, *Rerum cognoscere fines & causas*, contient aussi des vües ingénieuses & des détails intéressans, qui lui ont fait accorder le second accessit, sans que l'Académie prétende adopter par là les hypothèses qui servent de base au système de l'Auteur. Les billets qui appartiennent à ces deux pieces ne furent par conséquent pas brûlés, mais deposés cachetés comme ils l'étoient, pour

être

être ouverts dans le cas que les auteurs voulussent se faire connoitre & permettre, que leurs noms soient imprimés. (*).

M. le Prof. Géorgi lut, en allemand, l'extrait de la piece couronnée.

Le Secrétaire rappella ensuite que le prix concernant la force qui pousse le suc nourricier dans les animaux & la sêve dans les végétaux, jusqu'aux extrémités des plus petits vaisseaux, étoit renvoyé au premier Juillet 1786, aucune des pieces qui ont concouru sur ce sujet proposé dès l'année 1782, n'ayant encore rempli l'attente de l'Académie.

Le Secrétaire lut enfin la nouvelle question, qui avec l'approbation de Madame la Princesse a été proposée pour le prix de l'année 1787. En voici l'énoncé:

Quoique jusqu'à présent aucune comète ne se soit assés approchée de la terre pour causer du changement à son état, les observations les plus exactes n'en ayant pas découvert le moindre vestige; on a vu cependant quelques comètes, qui en traversant notre système planétaire, n'étoient qu'à une distance de la terre treize fois plus grande que celle de la lune; celle de 1770 paroissant même s'en être encore approchée d'avantage: & comme les élémens des orbites dans lesquelles les comètes se meuvent, surtout lorsque ces mouvemens ont lieu dans des plans

(*) L'un & l'autre se sont nommés depuis, & leurs billets ont sur cela été ouverts. L'auteur du premier accessit s'est trouvé être M. de Launay, de l'académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres à Bruxelles: Et celui du second accessit M. l'abbé Soulavie, Associé de diverses Académies & depuis Correspondant de l'Académie Impér. des Sciences.

plans qui diffèrent peu du plan de l'écliptique, peuvent éprouver des changemens considérables par l'action des corps célestes, ce que l'exemple de la comète vue en 1759 a démontré; il est probable que dans la suite des temps quelque comète, après avoir fait diverses révolutions pourroit tellement s'approcher de la terre, que ces deux corps exerceroient des actions réciproques l'un sur l'autre. Feu M. Leonhard Euler, dont les Mathématiciens ne cesseront jamais de vénérer le nom, a développé, avec la sagacité qui lui étoit propre, dans le Tome XIX^e des nouveaux Commentaires, le cas où une comète s'avançant dans le plan de l'écliptique, seroit supposée aller droit au soleil; & en calculant la perturbation que cette comète éprouveroit, il a frayé la route à la solution du Problème suivant, qui doit servir de question pour l'année 1787:

Si une comète s'approchoit assés de la terre, pour que l'action réciproque de ces deux corps devint sensible, determiner:

1.) Quelles inégalités en résulteroient dans le mouvement de notre globe composé de terre & d'eau?

2.) Quels seroient en particulier les phénomènes qu'on devroit s'attendre à voir arriver dans l'Ocean?

3.) Enfin comment ces deux corps, après l'exercice de leur action réciproque, continueroient leur cours?

L'Académie dans un Programme imprimé en latin & en russe invita à son ordinaire les savans de toutes les nations qui voudront travailler sur ce sujet, à envoyer leurs mémoires avant le 1^er Juillet 1787, pour être soumis au jugement des académiciens ordinaires, dont aucun ne peut concourir; & promit

promit d'adjuger dans la premiere aſſemblée publique qui ſuivra ce terme de concours, le prix de cent ducats d'Hollande à celui qui aura le mieux reſolu cette queſtion. Les autres conditions requiſes en pareil cas, qui ſe trouvent dans ſon programme, ſont ſuffiſamment connues.

L'Académie a fait des acquiſitions très conſidérables dans le cours de cette année.

En échange d'une magnifique coupe d'or garnie d'antiques, qui ſe trouva au muſée académique & qui fut transportée au cabinet des raretés de Sa Majeſté l'Impératrice, cette gracieuſe Souveraine & Protectrice des Sciences ordonna d'acheter pour l'Académie un cabinet de minéraux: une telle acquiſition ayant plus de rapport aux ſciences que l'Académie cultive, & les collections qui s'y trouvent en ce genre n'étant que très incomplettes. Le choix tomba d'abord ſur le cabinet de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, qui ſe trouva depoſé à la maiſon d'éducation pour les Démoiſelles nobles; mais comme l'abſence du proprietaire, qui s'eſt établi à Irkutzk', occaſionnoit des difficultés pour le retirer de l'endroit où il étoit, Madame la Princeſſe tourna ſes vües ſur un autre cabinet qui n'étoit pas moins conſidérable, & qui appartenoit à S. E. Mr. de Nartof, Conſeiller d'État actuel & Chevalier de l'ordre royal Danois de Dannebroek. Celui-ci le vendit pour huit mille roubles, que Sa Majeſté l'Impératrice fit payer tout de ſuite de ſa chatouille. Madame la Princeſſe chargea là deſſus Mrs. les Académiciens Ferber, Ozeretskofski & Gèorgi de le recevoir des mains de l'ancien proprietaire, & de le faire tranſporter au bâtiment de l'Académie.

Ce cabinet contient une grande & belle collection de minéraux indigènes, & le catalogue en eſt de cinquante feuilles.

 Outre

Outre ceux-ci s'y trouvent encore ſans catalogue 1533 minéraux étrangers, 139 minéraux ruſſes, & 91 foſſiles ou pierres tant étrangeres qu'indigènes.

Une ſeconde acquiſition qui n'eſt pas moins précieuſe eſt celle d'un miroir ardent de métal, avec deux miroirs paraboliques de cuivre jaune battu & argenté, que Sa Majeſté l'Impératrice a fait acheter en Allemagne pour dix mille florins & dont Elle a fait préſent à l'Académie. Cette magnifique piece arriva en Septembre & fut dépoſée & montée dans la ſalle d'aſſemblées, où elle reſtera, jusqu'à ce que par le transport de quelques départemens académiques au nouveau bâtiment, il ſe trouvera des chambres vuides & aſſés ſpacieuſes pour y placer le cabinet de Phyſique expérimentale. Ce miroir a quatre pieds & demi de diamètre, & eſt de même compoſition que les miroirs des Teleſcopes. Sa ſurface ayant donc 38476 lignes quarrées, & ſon foyer qui ſe forme à la diſtance de 4 pieds & demi, n'étant que de 3 lignes, la chaleur qui s'y concentre ſurpaſſe 12800 fois celle du Soleil, & eſt par conſéquent ſi grande qu'aucun corps n'y peut réſiſter ſans changer de nature. Auſſi tous les métaux s'y fondent en peu de ſecondes: l'asbeſte qui eſt une matiere reconnue incombuſtible, s'y vitrifie en 12 ſecondes: & ſi l'on paſſe devant une buche de bois verd, la flamme en ſort avec violence & fait une exploſion, comme ſi c'étoit de la poudre à canon. Au reſte cette piece eſt auſſi bien polie que les glaces des miroirs, & n'a aucun défaut; de ſorte qu'elle repréſente avec une grande vivacité devant lui, comme ſuspendus en l'air, tous les objets qu'on y approche. Enfin ce miroir eſt monté & encadré proprement & on le dirige par un méchanisme à rouage avec beaucoup d'aiſance; il eſt de plus porté ſur quatre roues de cuivre par le moyen desquelles on peut le mener & le ma-

noeu-

noeuvrer à volonté. L'artiste est M. Charles Lefebure, Méchanicien de S. A. Sérénissime Electorale de Cologne. Les deux miroirs paraboliques ont deux pieds de diamètre & leurs surfaces argentées & bien polies, renvoyent la lumiere avec beaucoup de force.

Un présent très agréable encore, que l'Académie reçut au mois d'Août de l'Académie Royale des Sciences de Paris, fut celui du buste d'un des ses plus célèbres associés étrangers, feu M. d'Alembert, fait dix ans avant son déces, par M. le Comte en 1773. Ce monument précieux fut placé dans la salle principale de la Bibliothèque académique.

Enfin un chronomètre pour la détermination des longitudes en voyage, que feu M. Lexell avoit encore commandé pour l'Académie chez l'horloger célebre Arnold, lors de son sejour à Londres, & qui ensuite a été vérifié & examiné par M. Maskelyne à l'observatoire de Greenwich.

Les autres acquisitions moins considérables se trouvent indiqués ci-dessous à l'Article *Ouvrages, machines & inventions présentées à l'Académie.*

L'Académie a publié dans le courant de l'année 1785 le X^e volume de ses Actes qui contient l'histoire du dernier semestre de 1781 & dix-neuf mémoires de Mathématique & de Physique: & outre quelques traductions russes d'ouvrages scientifiques, parut aussi le 1er volume des voyages du defunt Prof. Falk, rédigées par M. le Prof. Géorgi.

L'Académie a fait diverses pertes, parmi lesquelles la principale a été celle du Conseiller d'État actuel de Stèhlin, le dernier des anciens Académiciens ordinaires, qui vivoit encore depuis le temps antérieur au renouvellement de l'Académie sous l'Impératrice Elisabeth de glorieuse mémoire: on trouvera un précis de sa vie littéraire à la suite de cette histoire.

Les autres morts sont:

1.) du nombre des Associés externes

Le R. P. Paul Frisi, Barnabite, Professeur Impérial de Mathématiques à Milan: reçu au nombre des Associés en 1756.

M. Jean-Gottschalk Wallerius, Chevalier de l'ordre Royal Suédois de Wasa, ancien Professeur de Chymie, de Métallurgie & de Pharmacie à l'Université d'Upsal: où il est décédé le $\frac{5}{16}$ Novembre 1785 dans sa 77^e^ année. L'Académie l'avoit reçu au nombre des Associés externes le 29 Décembre 1776.

2.) du nombre des Correspondans régnicoles

M. Jean-Henri-Gottlieb Engel, Docteur en Médecine, Assesseur de Collèges & Chirurgien opérateur au Grand Hôpital à Moscou: reçu au nombre des correspondans tîtrés le 10 Juin 1779, & mort le 11 Février 1785.

M. Adrian Socolof, Assesseur de Collèges & Inspecteur des Plantages Impériales à Astrachan. Reçu au nombre des correspondans en 1776 & mort le 29 Janvier 1785.

M. Guillaume Lagus, Lieutenant & Aide-de-Camp de S. E. Mr. le Gouverneur-Général de Permie & de Tobolsk'

Tobolski, Chevalier de Kaſchkin. L'Académie l'avoit reçu au nombre de ſes correſpondans le 20 Novembre 1783: il mourut le 16 Juin 1785.

Précis de la vie de M. de Stèhlin.

Jacques de Stèhlin, Conſeiller d'Etat actuel, Directeur des départemens des Beaux-Arts à l'Académie Impériale des Sciences, & Secrétaire perpétuel de la Société libre économique de St. Pétersbourg: Membre de l'Académie Royale d'Hiſtoire de Madrit, des Sociétés Royales des Sciences & des Antiquités de Londres, de la Société hollandoiſe de Harlem, de celle des belles-lettres de Leipzig, de l'Inſtitut hiſtorique de Göttingue & de la Société de la culture des abeilles dans la Haute-Luſace: Naquit à Memmingue, ville libre impériale de la Souabe, le 10 Mai 1709.

Son pére étoit du grand Conſeil de cette ville, & ſes ancêtres avoient depuis d'anciens temps été révétus d'emplois conſidérables tant civils qu'écléſiaſtiques à Bâsle, Memmingue & Augsbourg. Le jeune Stèhlin fréquenta d'abord le Lycée de ſon lieu natal; en 1728 ſon père l'envoya au Gymnaſe de Zittau, où il s'appliqua pendant près de 3 ans aux langues, aux belles-lettres & aux beaux-arts: c'eſt ici qu'il apprit auſſi l'art des feux d'artifices, chez un Italien qui dans ce temps là paſſa pour y exceller. En quittant cet inſtitut en 1731, il y fit imprimer & defendit publiquement ſa diſſertation *de indole hominis & optimi principis, exemplo Traiani demonſtrata.* Il parcourut enſuite les principales villes de l'Allemagne & y viſita les bibliotheques, les ſavans & les artiſtes les plus célebres. Il s'arreta ſur tout à Dresde, où il trouva de quoi ſatisfaire ſon

ſon penchant pour les beaux-arts. Delà il ſe rendit à l'Univerſité de Leipzig où il vécut près de trois ans. C'eſt ici qu'il ſe perfectionna non ſeulement dans ſes études favorites, la poéſie, la mythologie, la numismatique & les antiquités: mais qu'il puiſa encore cette teinture univerſelle de toutes les ſciences, par laquelle il s'eſt fait généralement aimer dans toutes les ſociétés. Il publia dans la derniere année de ſon ſejour à Leipzig, une traduction allemande de Sapho en vers, dans le même mêtre que l'original grec, imprimé à côté: ainſi que d'autres traductions d'ouvrages italiens & françois qui alors étoient en vogue. Enfin pendant les fêtes qui ſuivirent l'avénement au throne du Roi de Pologne Auguſte III., il s'amuſa à inventer pour les illuminations ſolemnelles, pluſieurs repréſentations allégoriques, qui furent goutées par le public, & admirées par les connoiſſeurs.

M. le Baron de Korff, Chambellan actuel de Sa Majeſté l'Impératrice Anne Iwanowna de Ruſſie, & dans ce temps Préſident de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, ayant pris connoiſſance des talens du jeune M. de Stèhlin, il conçut l'idée de l'attirer au ſervice de l'Académie; il en ſentit d'autant plus le beſoin, que c'étoit toujours à l'Académie que la cour s'adreſſoit pour les inventions allégoriques dans les illuminations & les grands feux d'artifices qui alors ſe donnerent très fréquemment, & que perſonne ne ſe trouvoit alors à l'Académie qui eut été ſuffiſamment verſé dans cette partie. M. de Stèhlin reçut en conſéquence à la fin de l'année 1734, étant encore à Leipzig, une vocation d'Adjoint de l'Académie en Hiſtoire pour cinq ans: mais il déclina cette premiere vocation alleguant pour raiſon qu'un engagement de tant d'années lui paroiſſoit à ſon âge une contrainte trop forte, ſurtout pour les paſſer dans un climat auſſi froid que l'eſt l'eſt celui de St. Pétersbourg. Il quitta ſur cela l'Univerſité de Leipzig au mois de Janvier 1735 & ſe rendit à Dresde, où il devoit entrer comme Secrétaire auprès du Général Baron de Loewendahl, & accompagner enſuite le fils ainé dans ſes voyages, ce qui lui ſembloit être une perſpective plus riante & pour ſon âge & pour ſon penchant: mais pendant qu'il y étoit à attendre l'arrivée du Général, que des affaires obligoient de s'arrêter en Pologne, il reçut du Baron de Korff une ſeconde vocation, dans laquelle on lui accordoit la liberté de quitter le ſervice en tout temps, après en avoir demandé la permiſſion une demi-année d'avance. Cette liberté fit pencher la balance, & M. de Stèhlin retourna vers la fin d'Avril à Leipzig, à fin d'y concerter avec le Profeſſeur Lotter également engagé pour l'Académie: ils partirent donc enſemble & après avoir paſſé quelques ſemaines à Wittenberg, Berlin & Hambourg, il s'embarquerent à Lubec & arriverent à St. Pétersbourg le 25 Juin. M. de Stèhlin ſe rendit tout de ſuite à Péterhof, auprès de M. le Baron de Korff, qui lui fit le meilleur accueil & qui le préſenta encore le même jour à la cour.

Ses premieres occupations à l'Académie conſiſterent à rédiger la Gazette allemande, ou plutôt à l'écrire presqu'en entier. Il donna enſuite pluſieurs articles pour les remarques hiſtoriques, qui alors furent publiées avec les gazettes; & il fit par ordre du Préſident, des extraits allemands des comédies & intermezzos italiens, repréſentés deux fois par ſemaine, pour être diſtribués à la cour avant leur repréſentation. Il compoſa auſſi pour les fêtes particulieres de l'Impératrice & à l'occaſion de diverſes rejouiſſances publiques, pluſieurs odes & poëſies fugitives, qui lui concilierent la bienveuillance de la cour. Il fournit au Corps d'Artillerie les inventions & esquiſſes des repréſentations allégoriques pour les feux d'artifices & les

 illu-

illuminations: il projetta enfin les deſſins & donna les inſcriptions pour les diverſes médailles, qui furent frappées en mémoire des événemens & époques remarquables.

Le 14 Octobre 1737. M. de Stèhlin fut reçu Académicien ordinaire & nommé Profeſſeur d'Éloquence & de Poéſie, toujours ſous la condition de pouvoir quitter le ſervice dès que l'envie lui en prendroit, en le dénonçant ſeulement une demi-année d'avance. Il lut en cette nouvelle qualité un cours public du Droit naturel & de la Philoſophie morale, & il en donna un autre ſur la petite logique de Wolff. En cette même année M. de Korff le chargea de l'intendance du departement des graveurs & de la direction des remarques que l'Académie continuoit de publier avec ſes gazettes.

L'Impératrice Anne étant décédée au mois d'Octobre 1740, M. de Stèhlin fut employé dans la commiſſion de deuil: il y fournit les idées pour la décoration allégorique des appartemens funebres, du catafalque & de l'épitaphe dans l'égliſe de St. Pierre & Paul à la forteresse, & il eut l'inſpection de la conſtruction de ces divers monumens. Enſuite il en compoſa la déſcription, qu'il inſéra dans les remarques aux gazettes de 1741.

Sous la préſidence du Conſeiller privé M. de Bevern, M. de Stèhlin fut chargé de refondre la Grammaire allemande que l'Académie avoit fait imprimer à l'uſage de ſes éléves, & de l'augmenter d'une proſodie complette. Il fit auſſi les inventions & les esquiſſes des cartouches pour les cartes de l'Atlas Ruſſe que l'Académie publia en cette année, & il eut l'honneur de préſenter à Sa Majeſté l'Impératrice Eliſabeth, à la fête de ſa naiſſance, une ode ſur ſon avenement au Throne, qu'il avoit compoſée au nom de l'Académie.

La

La cour étant partie en 1742 pour Moscou pour le Couronnement de Sa Majesté l'Impératrice, M. de Stèhlin eut ordre de la suivre pour projetter & diriger les fêtes multipliées qui s'y donnérent à cette occasion: c'est ici qu'il introduisit pour la premiere fois dans les feux d'artifice, des plans composés d'une grandeur colossale. L'Impératrice le nomma après la clotûre de ces fêtes, Précepteur du Grand Duc Pierre Feodorovitsch, fonction qu'il exerça pendant trois ans, à l'expiration desquels il fut decoré du titre de Conseiller de cour & gratifié de mille roubles d'appointemens annuels.

Du retour à St. Pétersbourg, il fut encore chargé de fournir des inventions allégoriques pour les feux d'artifices & les illuminations données au sujet de la paix conclue avec la Suede. À cette occasion il inventa & introduisit dans les feux d'artifices, des figures mouvantes, qui furent très applaudies à la cour & perfectionnées ensuite de plus en plus.

En 1745, au renouvellement de l'Académie, M. le comte Kyrille de Razoumofski en ayant été nommé Président, il chargea M. de Stèhlin de la direction des départemens des Arts, que notre Académicien étendit de plus en plus, & où il forma plusieurs habiles éléves. Il parvint ainsi à établir en 1748, auprès de l'Académie des Sciences, une Académie des beaux-arts, dans laquelle les graveurs, architectes, modeleurs, sculpteurs & autres artistes attachés à l'Académie, étoient obligés de s'exercer deux fois par semaine dans les dessins d'après Nature. C'est à cet établissement que l'Académie dut plusieurs bons graveurs, des ouvrages desquels existent encore les plans & les vües de St. Pétersbourg, ainsi que tant d'autres estampes & tailles douces, qui se debitent encore aujourd'hui à la librairie académique.

La Bibliothéque & la chambre des rarétés ayant été détruites par une incendie en 1747, M. de Stèhlin fut chargé par une oukafe de reconftruire cet édifice, & il l'acheva en trois ans à la grande fatisfaction du Préfident, qui lui fit affigner en recompenfe une augmentation de gages de 200 roubles par an.

En 1757 M. de Stèhlin fut nommé membre de la chancellerie académique & Directeur du département des beaux-arts: enfuite cenfeur des ouvrages en belles-lettres, hiftoire & beaux-arts, écrits en langues étrangéres.

Notre Académicien fut encore placé dans la chancellerie Impériale des monnoyes, avec voix & féance, à fin d'y diriger les médailleurs & les élèves dans leurs travaux, & de fournir les inventions des revers pour les nouvelles médailles que l'Impératrice faifoit frapper: emploi qui lui valut une penfion annuelle de 600 roubles. Ces fonctions rélatives aux médailles, & celles qu'il avoit à la chancellerie académique l'occuperent fans relâche jusqu'en 1762, où après le decès de l'Impératrice Elifabeth de glorieufe mémoire, il fut d'abord requis pour la commiffion funebre & chargé de fournir des inventions & des deffins pour les décorations de la fale funebre, le catafalque dans l'églife de la forterefse, & l'épitaphe. À peine s'étoit-il acquitté de cette charge, qu'il fut expédié par ordre de Sa Majefté l'Impératrice actuellement regnante pour Moscou, où il fut employé dans la commiffion pour les préparatifs du Couronnement, & où il donna non feulement l'esquiffe d'un grand feu d'artifice avec des figures mouvantes, ainfi que de plufieurs illuminations & de tous les ornemens allegoriques du Palais Impérial, mais dont il foigna encore l'execution, en dirigeant les travaux des artiftes dans leurs attéliers.

En

En 1763 M. de Stèhlin fut nommé Conseiller d'Etat. En 1765 il prit le titre & les fonctions de Secrétaire perpétuel de l'Académie, en se chargeant de la registrature des archives & en rétablissant la Correspondance étrangère: l'année suivante Sa Majesté l'Impératrice le nomma membre de la commission académique établie sous M. le comte Orlof, à qui S. M. avoit confié la Direction de Son Académie des Sciences.

La même année il fut élu par la pluralité des voix Député de l'Académie des Sciences pour la commission des loix, qui a été établie à Moscou pendant le séjour de la cour en cette capitale: mais il déclina cet honneur & proposa à sa place M. le Conseiller de Colleges Müller, que l'Académie accepta.

En 1769. M. de Stèhlin resigna sa place de Secrétaire perpétuel des conférences académiques, & la remit avec les archives à M. le Professeur Euler le fils, que le comte Orlof en revetit. Se trouvant par là moins occupé qu'auparévant, il employa les loisirs que lui laisserent ses autres fonctions, à achever l'histoire de l'état & des progrés des beaux arts en Russie, ouvrage qu'il avoit déja depuis long-temps couché par écrit sous le titre: *Nachrichten von den schönen Künsten in Rusland*, & dont il fit imprimer encore dans cette même année la premiere partie, qui comprend le théatre, les ballets & les danses, dans le 1^er volume *der Beylage zum neuveränderten Russland* par M. Schlözzer. La seconde partie qui roule sur la musique en Russie, fut depuis inférée au second volume du même ouvrage. Il s'occupa ensuite de la rédaction des anecdotes sur Pierre le grand, qu'il avoit recueillies dans l'espace de plus de trente années, de la bouche même des personnes qui avoient vecu du temps de ce restaurateur de la Russie: & il acheva à la fin de 1774 les inventions pour une ſuite de 125 revers de médailles ſur la vie & les actions de Pierre le grand. Ouvrage orné des beaux deſſins, qui fut préſenté à Sa Majeſté l'Impératrice & qui eſt reſté en manuſcript. (*)

Dans les promotions qui eurent lieu à l'occaſion de la célébration de la paix conclue en 1775 avec la Porte Ottomane, M. de Stèhlin obtint le titre de Conſeiller d'Etât actuel.

Il eut enſuite beaucoup de part à la célébration du Jubilé, ou du cinquantieme anniverſaire de la fondation de l'Académie des Sciences: il projetta non ſeulement les décorations du bâtiment académique & ſurtout de la ſalle d'aſſemblées pour cette journée ſolemnelle, mais il en dirigea encore lui même l'execution.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant ſuccédé en 1783 dans la Direction de l'Académie, & la commiſſion académique ayant été abolie, M. de Stèhlin ſe vit encore plus libre d'occupations & ſe chargea de nouveau de la direction de la gazette, qui avoit été ſa premiere fonction en arrivant en Ruſſie.

La Société libre économique qui l'avoit reçu au nombre de ſes membres dès la ſeconde année de ſa fondation en 1766, le chargea peu de temps après du ſecrétariat pour la correſpondance étrangère, auquel feu le Conſeiller de cour Lehmann venoit de reſigner. M. de Stèhlin s'en acquitta jusqu'à ſa fin avec ce

(*) Le premier ouvrage n'a paru qu'après ſa mort: Mad. la douairiere Conſeillere d'Etat de Stèhlin en a fait préſenter un exemplaire à l'Académie, ainſi qu'une copie du dernier ouvrage manuſcript.

ce zéle vif qui animoit toutes ſes actions, & contribua encore diverſes pieces pour les collections que cette Société publie ſous le titre de труды вольнаго экономическаго общества.

En 1784 et 1785, notre Académicien continua comme il avoit fait jusqu'ici, à fournir des inventions & esquiſſes, tant pour les décorations typographiques des ouvrages que l'Académie publioit, que pour les revers des nouvelles médailles que la cour & le dirigeant Sénat faiſoient frapper, en mémoire des actions grandes & bienfaiſantes qui ſignalent le regne glorieux ſous lequel nous vivons.

M. de Stèhlin étoit d'une humeur égale & gaye, & ſes excellentes vertus le faiſoient aimer & eſtimer de toutes les perſonnes qui le connoiſſoient. Auſſi fut il fort recherché & très bien reçu dans toutes les Sociétés.

Il jouïſſoit d'une ſanté qui paroiſſoit inaltérable, & à laquelle ſon caractère égal & heureux avoit aſſurément la plus grande part. Ce ne fût que vers le printemps de 1785 que ſa ſanté reçut un choc & qu'elle empira de plus en plus. M. de Stèhlin s'affoiblit conſidérablement, & ſa maladie ſe declara enfin en hydropiſie de poitrine. Il conſerva cependant jusqu'au dernier ſouffle de ſa vie une patience héroique & une réſignation vraiment chrétienne. C'eſt ainſi qu'il mourut fort tranquillement le 25 Juin 1785 dans ſa 77eme année, après avoir ſervi l'Empire de Ruſſie ainſi que l'Académie Impériale des Sciences pendant l'eſpace de 50 années complettes.

M. de Stèhlin avoit épouſé en 1742, *Eliſabeth Reichmuth* fille de J. Reichmuth, premier Prédicateur & Paſteur de l'Egliſe luthérienne à Moscou: de ce mariage lui ont ſurvecu trois

trois enfans; un fils, Pierre de Sthèlin, Conseiller de Légation, qui s'est fait connoître dans le monde littéraire par une traduction allemande de la Chronique abrégrée des Souverains de Russie par M. Lomonossof, & deux filles, qu'il avoit eu la satisfaction d'établir encore de son vivant.

Outre les ouvrages du défunt Académicien, dont nous avons parlé dans ce précis de sa vie, nous indiquerons les suivans:

Lobrede auf Johann Hommel, Kaiser Karl V. Hofmathematicus. Memmingen 1728.

Prologo, la Russia affitta e riconsolata, imprimé & représenté à Moscou en 1742, pour la fête du couronnement de l'Impératrice Elisabeth.

Kurtze geographische Beschreibung des Fürstenthums Moldau, und der zwischen dem schwartzen Meere und der kaspischen See gelegener Länder und Völker. 1770.

Von Tschirkassien oder den Kabardinischen Landen 1772. inséré dans le magazin géographique de M. le D. Büsching.

Kurtze Nachricht von dem neulich entdeckten Nord-Archipelagus 1774.

OU-

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, présentés ou donnés à l'Académie en l'année 1785.

Le Vendredi 17 Janvier. Son Excellence Madame la Princesse de Daschkaw faisant les fonctions de Directeur, a envoyé de la part de Sa Majesté Impériale, pour être déposé au médailler académique, douze monnoyes d'argent asiatiques d'une antiquité très reculée, avec une explication présentée par M. le Conseiller de Collèges Pallas.

Le 20 Janvier. Madame la Princesse de Daschkaw a fait remettre de la part de Sa Majesté l'Impératrice, la premiere partie du magnifique ouvrage botanique annoncé en 1782 (*) & publié sous le titre: *Flora Rossica, seu stirpium Imperii Rossici per Europam & Asiam indigenarum descriptiones & icones*, gr. in fol.

Le Secrétaire perpétuel de Conférences, M. Jean-Albert Euler a lu une lettre de M. Rulffs datée d'Einbeck le 23 Décembre 1784, qui envoie des brochures publiées à l'occasion de son mémoire sur les maisons de correction, approuvé par la Société Royale des Sciences de Göttingue & présenté à l'Académie le 9 Sept. de l'année derniere (**).

Ex

(*) Acta Acad. Imp. Sc. Petrop. ad An. 1782. Pars posterior, pag. 9.

(**) Histoire de l'Académie pour 1784, pag. 33.

Le même 20 Janvier. Le Secrétaire a remis un mémoire manuſcript latin: *Diſſertatio de parallelis*, préſenté par un étudiant nommé Elkana, qui ſollicite une place de Mathématicien à l'Académie. Cet écrit qui ne contient rien qui ſoit digne de l'attention des Académiciens, a été rendu à l'auteur.

Le 27 Janvier. M. le Conſeiller de Colléges Pallas a envoyé pour être préſenté à l'Académie, un mémoire manuſcript de M. le Docteur J. H. Roudolph, ſur la congélation du mercure, où ſont rapportées des expériences que l'auteur prétend avoir faites à Jena pendant un froid naturel de $32\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur: ce qui diſpenſa Mrs. les Académiciens d'en dire leur ſentiment.

Le 31 Janvier. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être expoſé à l'aſſemblée, communiqué au département géographique, & pour être examinée la nouvelle carte générale de l'empire de Ruſſie, publiée par ordre de S. E. Mr. le Procureur Général Prince de Vaſemski, & gravée d'après le deſſin de M. le Major Pétin.

Le 14 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre, pour être préſenté de la part des éditeurs & dépoſé enſuite à la Bibliotheque:

Annales of Agriculture and other uſeful arts collected and published by Arthur Young Esqr. vol. I. in 8vo.

Opere di Nicolo Machiavelli Tom. I. II. III. IV. V. & VI. in 4to.

ce dernier ouvrage étoit accompagné d'une lettre italienne de l'éditeur, datée de Florence le 12 Juillet 1783 & ſignée Réginald Tanzini.

Le

Le 17 Février. Madame la Princeſſe a envoyé pour être préſenté de la part de l'auteur: Nouvelles expériences pour ſervir à déterminer le vrai point de congélation du Mercure & de la différence que le degré de pureté de ce métal pourroit y apporter: par M. Guthrie Conſ. de Cour & Medécin du Corps noble des Cadets de terre.

Le 24 Février. Madame la Princeſſe a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice cinq petites monnoyes d'argent, trouvées dans le Gouvernement de Pleskow, avec une explication ſignée par M. le Conſ. de Collèges Pallas.

Le Secrétaire a lu avec la permiſſion de S. E. Madame le Princeſſe de Daſchkaw: *Memoire über die neue Claſſe von Edelſteinen, wovon vor drey Jahren nur eine vorläufige Ankündigung bey der Erlauchten Akademie der Wiſſenſchaften zu St. Petersburg verſiegelt deponirte Ernſt Chriſtoph Schultz.* (*). L'auteur en demandant à Madame la Princeſſe cette permiſſion que ſon mémoire ſoit lu à l'Académie, prie Son Excellence, dans une lettre datée de Hambourg le 16 Février, que ſon dépot envoyé en 1781 ne ſoit pas encore decacheté, à fin qu'il puiſſe ſervir quelque jour de document pour conſtater la dâte de la decouverte qu'il a faite d'une nouvelle claſſe de pierres précieuſes, & qu'il annonce enfin être l'Aſtérie de Pline.

Le 10 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. A. Msgr. le Prince de Potemkin, pour être conſervé au cabinet de curioſités, deux anneaux d'or trouvés ſous

d 2 ter-

(*) Hiſtoire de l'Académie Anne 1781. Partie 1, pag. 54.

terre, aux environs de Bachmouth, qui ſemblent avoir ſervi de boucles d'oreilles ou d'attaches de vêtement.

Le 14 Mars. Madame la Princeſſe a envoyé pour le cabinet d'hiſtoire naturelle ſix flacons avec des animaux conſervés dans de l'eſprit de vin, & un poiſſon ſeché, qu'elle a détaché de ſa propre collection, ayant été informée que ces pieces manquoient à l'Académie.

M. le Conſ. de Cour Kotelnikof a expoſé un monſtre humain, conſervé dans de l'eſprit de vin & envoyé à l'Académie par le Gouvernement de Smolensk: ce ſont deux enfans jumeaux réunis par le *Sternum* & les machoires, n'ayant qu'une ſeule bouche.

Le 21 Mars. M. le Conſ. de Cour Lepechin a lu une lettre addreſſée à l'Académie par M. le Conſ. de Collèges Ladigin, datée de Kritſchef le 8 Mars, qui envoie divers échantillons d'un ſel alkali raffiné, qu'il a préparé du rebut qu'on rejette dans les ſavonneries, & qui devient cependant d'une grande utilité aux artiſtes qui travaillent en métaux. M. Ladigin déſire que l'Académie après avoir fait examiner ſa découverte, la rende publique, offrant de communiquer par écrit la maniere de préparer ce ſel en grande quantité. M. l'Académicien Géorgi ayant été chargé de cet examen, il en a fait un rapport très avantageux. Voyez ſon mémoire inſéré au 1er Tome de ces nouveaux Actes pag. 323.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une lettre que lui a adreſſée S. E. Mr. le comte Tſchermiſchef, qui lui communique le jugement favorable que l'Amirauté a porté du cercle à réflexion, inventé par M. de Magellan à Londres & préſen-

présenté à l'Académie le 10 Octobre 1783. Voyez l'histoire de l'Académie pour cette année: pag. 26 & 141.

Le même 21 Mars. S. E. Msgr. l'ambassadeur de la cour Impériale & Royale, comte de Cobenzl', a envoyé pour être communiqué à l'Académie, le Programme d'un prix proposé par un anonyme, concernant une question de Jurisprudence.

Le 28 Mars. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé trois vases étrusques, dont Sa Majesté l'Impératrice a fait présent à l'Académie, pour être deposés à son cabinet de curiosités.

Le Secrétaire a lu une lettre adressée à l'Académie par M. le Cons. de Cour Gerngross, Président du Magistrat de Pleskow, qui envoye diverses pierres & terres des environs de cette ville, priant l'Académie de les faire examiner, pour savoir ce qu'ils contiennent & à quel usage on pourroit les employer? L'Académie en a chargé M. le Prof. Géorgi, qui en a fait son rapport à la séance suivante.

Le 31 Mars. M. le Cons. de Cour Ozeretskofski a communiqué une rélation du tremblement de terre qui a été ressenti à Mosdoc le 12 Février: elle a été inserée dans les gazettes.

M. le Conseiller de Collèges Pallas a lu des lettres de M. Patrin, datées d'Irkoutz, & de M. Jährig, datées de Gousinoiozero prés du lac Baikal. Le premier communique diverses nouvelles interéssantes & envoie des semences pour le jardin botanique. L'autre communique l'esquisse d'une histoire des nations établies dans le Gouvernement d'Irkoutzk', à la quelle il va travailler par ordre du Gouvernement, & envoie une carte topographique des contrées entre les frontieres de la Chine & le lac Baikal, fur laquelle il a indiqué la nouvelle route qu'il a découverte pour aller commodément de Kiachta au lac Baikal: cette route eft beaucoup plus courte que l'ordinaire, & mêne presqu'en droite ligne à l'embouchure de l'Angare.

Le 4 Avril. Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé de la part du corps Impérial des nobles Cadets de Marine, le Dictionnaire anglois & ruffe, que cet inftitut a fait imprimer à l'ufage de fes éléves.

Le 11 Avril. M. le Conf. de Cour Lepechin a rapporté, avoir reçu de M. le Conf. de Cour Laxmann une caiffe de diverfes racines, qu'il a plantées au jardin botanique.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lalande datée de Paris le 27 Mars, qui communique les obfervations de la nouvelle comète, découverte par M. Méchain dans la conftellation d'Andromède.

M. le Confeiller de Collèges Pallas a remis de la part de M. le comte de Harfch, chambellan de S. M. Impériale & Royale, des obfervations fur plufieurs méteores, qui ont parus dans l'atmofphère dans le temps qu'il fe trouvoit en Ruffie Blanche, fur les domaines de S. A. Msgr. le Feld-Marechal Prince de Potemkin, avec quatre deffins colorés.

Le 28 Avril. Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé une collection de cryftaux du Caucafe, dont elle a fait préfent au cabinet académique.

Le

Le 2 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé par ordre de Sa Majesté l'Impératrice, pour être déposé au cabinet académique, quinze monnoyes antiques trouvées au Gouvernement de Pleskow, avec une explication de M. le Conseiller de Collèges Pallas.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conf. de Cour Laxmann datée de Talzinsk près d'Irkoutzk', le 22 Février, qui envoie avec un catalogue, plusieurs productions marines ainsi qu'un Musaraigne, dont la description se trouve insérée au présent volume pag. 285.

Le 5 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté l'Impératrice, pour être déposé au médailler académique, deux médailles frappées en mémoire du feu Aide-de-Camp-Général Lanskoi, l'une en or & l'autre en argent.

Le 12 Mai. M. le Prof. Krafft a présenté de la part de M. le Brigadier, Chevalier Brekling, un extrait des observations météorologiques, que ce militaire, amateur de la Physique, a faites en diverses villes de la Russie, pendant les années 1772 — 1778, & dont il promet d'envoyer la continuation.

Le 16 Mai. Le Secrétaire a présenté de la part de l'auteur, M. le Commissaire Rulffs à Einbeck, un volume in 8^{vo} contenant 1.) *Versuch zur Beantwortung der Frage: wie sind Waysenhäuser anzulegen?* 2.) *Ueber die Preissfrage: von der vortheilhaftesten Einrichtung der Werck- und Zuchthäuser: zwote vermehrte Auflage.*

Le Secrétaire a présenté une lettre addressée à l'Académie par le Sr. Fantet, qui envoie un plan & un mémoire con-

concernant la conſtruction d'un nouveau fourneau pour la formation des ſels. Cet écrit n'a mérité aucune attention.

Le 23 Mai. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis, de la part de S. E. Mr. le comte Grégoire de Razoumofski, le 1er tome des mémoires de la Société des Sciences Phyſiques, établie à Lauſanne en Suiſſe. Année 1783.

Il a lu une lettre de M. Jährig, datée du 28 Février, qui envoie le commencement de ſon hiſtoire des nations de l'Aſie ſeptentrionale, dont il a été chargé par le Gouvernement. Enſuite une lettre très interéſſante de M. Raſpe, ſur l'analyſe chymique de quelques minéraux remarquables: cette lettre eſt datée d'Entral près de Mamborn en Cornwallis, le 5 Mars.

Le 26 Mai. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur, M. Giovanni Vivenzio, chevalier de l'ordre Royal & militaire de St. Conſtantin & premier Médecin du Roi de Naples: 1.) *Theoria e Pratica dell' Elettricita medica del Signor Tiberio Cavallo e della forza dell' Elettricita nella cura della ſuppreſſione de menſtrue del Chirurgo Giovanni Birch, tradotte di G. Vivenzio* &c. avec des remarques du Traducteur & précédée de l'hiſtoire de l'électricité médicale. 2.) *Iſtoria & Theoria de' Tremuoti in generale & in particulare di quelli della Calabria e di Meſſina de* 1783. M. Krafft ayant été chargé d'examiner ces deux ouvrages, il en a fait un rapport très favorable à une des ſéances ſuivantes; qui a été ſuivi de la reception de cet auteur, au nombre des aſſociés externes.

Le

Le même 26 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 10 Mai, qui fait mention de la nouvelle invention de M. Moore, pour diminuer & rendre presque insensibles, les douleurs dans les amputations, & qui communique les nouvelles expériences de M. Priestley sur l'existence du phlogistique.

Le 30 Mai. M. le Conseiller de Collèges Pallas a distribué son avis au Public, concernant l'édition d'un Vocabulaire polyglotte, dont il est chargé par Sa Majesté l'Impératrice, qui en a fait Elle même le recueil.

—— —— il a lu une lettre de M. de Born, datée de Vienne le 16 Mai, qui annonce sa nouvelle méthode de séparer l'or, l'argent & même le cuivre, des minérais qui en contiennent, par une amalgamation beaucoup plus avantageuse rélativement au temps & à la dépense, que ne l'est l'ordinaire.

Le 6 Juin. M. le Conf. de Collèges Pallas a présenté de la part de l'auteur: *A general View of the writings of Linnaeus by Richard Pulteny M. D. London* 1781.

Le même a remis un avis aux médecins & botanistes, concernant l'impression de l'ouvrage de M. Allioni intitulé: *Flora Pedemontana;* & encore un prospectus de l'ouvrage de M. l'Heritier à Paris: *Stirpes novae aut minus cognitae, descriptionibus et iconibus illustratae.*

Le Secrétaire a remis de la part de la commission des longitudes établie à l'amirauté de Londres:

Theoria Lunae iuxta systema Newtonianum, auctore Tob. Mayer Londini 1767. 4to.

New and correct Tables of the motions of the Sun and Moon, by Tobias Mayer. 4to.

Tables for correcting the apparent distance of the Moon and a Star, from the effects of Refraction and Parallax, published by order of the Commission of Longitude. Cambridge 1772. 4to.

A Sexcentenary Table by John Bernoulli, London 1779. 4to.

A Sexagesimal Table, by Michael Taylor, London 1780. 4to.

A Table of Products, Folio.

Tables requisite to be used with Nautical Ephemeris for finding the latitude and longitude at Sea, London 1781. 8vo.

The original astronomical observations made in the course of a voyage to the Northern Pacific Ocean for the discovery of a Nord-East or North-West passage, London 1782. 4to.

The Nautical Almanach for the Year 1787, 88, 89, 90, 8vo.

& de la part de Société royale des Sciences de Londres:

Philosophical Transactions Vol. LXXIV. for the Year 1784. Part II.

Le 13 Juin. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour le cabinet d'Histoire naturelle un *Ludus Helmontii*, ou pierre cloisonnée coupée par le milieu & polie, dont l'extérieur ressemble à une tortue. En même temps S. E. à fait annoncer, que Sa Majesté l'Impératrice vient d'acquerir pour

pour une ſomme de dix mille florins un magnifique miroir ardent de métal, dont Elle fait préſent à l'Académie.

Le 16 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hermann, datée de Cathérinbourg le 23 Mars, qui envoie & préſente à l'Académie: *kurtze Beſchreibung der Tobolskiſchen Statbalterſchaft*, en manuſcript. L'Académie l'a fait traduire en ruſſe & inſérer au Calendrier Géographique de 1786.

—— —— il a lu une lettre du comte de Florida-bianca, premier Secrétaire d'État de S. M. Catholique, datée d'Aranjuez le 26 Mai, qui remercie l'Académie du préſent de ſes ouvrages, qu'elle a envoyés à la nouvelle Académie Royale des Sciences fondée à Madrit. Voyez le ſecond volume de ces nouveaux Actes: Hiſtoire de l'année 1784. pag. 8.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque:

The Hiſtory of the progreſs and termination of the Roman Republic, by Adam Ferguſon. Vol. I. II. III. London 1783. 4to.

A voyage to the Pacific Ocean, performed under the Direction of Capitains Cook, Clerke and Gore in thre volumes. The ſecond edition in 4to. Avec un volume de planches in gr. fol.

Le 23 Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothèque: Исторїя о странствїяхъ вообще. Часть IX по всѣмъ краямъ земнаго круга.

Le même 23 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre circulaire imprimée de M. le Profeſſeur Méderer à Fribourg en Brisgau, ſur l'éfficacité de ſon reméde contre l'hydrophobie, avec la méthode de s'en ſervir, & pluſieurs atteſtations qui certifient la guériſon entiere des perſonnes mordues par des chiens & des chats enragés. Cette lettre a été communiquée au College Impérial de Médecine.

Le 4 Juillet. Le Secrétaire a remis de la part de M. de Magellan de Londres: *Three regiſtres of a Poquet Chronometer and the obſervations from which they were collected, by count de Bruhl.* Et de la part de la Société Electorale de Météorologie à Mannheim: *Obſervationes meteorologicae anni* 1783, *in compendium redactae, a Carolo Koenig.*

—— —— il a lu une lettre adreſſée à Madame la Princeſſe de Daſchkaw par M. Pierre Camper, Aſſocié externe de l'Académie à Franecker en Friſe, qui y parle de ſes recherches actuelles ſur l'hiſtoire phyſique de la terre & ſur d'autres objets interéſſans & utiles à la ſociété, & qui finit par prier, que l'Académie lui envoie, pour pouvoir achever ces recherches importantes, divers oſſemens qu'on trouve dans le vaſte empire de Ruſſie en fouillant la terre, & dont il ſuppoſe que l'Académie poſſede pluſieurs doubles. Cette demande lui a été accordée.

—— —— il a remis de la part de M. le Conſeiller Privé Formey de Berlin, le nouveau programme des Prix propoſés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Pruſſe pour l'année 1787.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée de Talzinsk' le 26 Avril, qui envoie pour le jar-

jardin académique diverses semences cueillies dans les bois & les vallées entre Irkoutzk & le lac Baikal.

Le 7 Juillet. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliotheque, deux portraits gravés du Prince d'Albanie, Etienne Hannibal.

Un adepte nommé Charles Gustave Braun, a présenté & soumis au jugement de l'Académie, un traité manuscript sur la pierre philosophale. Mrs. Géorgi & Sokolof ayant été chargés de l'examiner, en ont fait leur rapport à la séance suivante, où ils disent que l'écrit est indéchifrable, & que le peu de passages intelligibles qui s'y trouvent, sont contraires à l'expérience. Ce traité a donc été rendu à l'auteur.

Le 18 Août. Madame la Princesse de Daschkaw a fait remettre par ordre de Sa Majesté l'Impératrice: 1.) pour être déposé au médaillier académique, 78 diverses monnoyes mahométanes avec un catalogue, que M. le Lieutenant Général Prince de Metscherski a envoyées de Casan: 2.) pour la Bibliothèque, un exemplaire du livre sur l'administration des Gouvernemens, traduit en langue tartare, pour l'intelligence des habitans de la Crimée, imprimé à St. Pétersbourg.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Schultz, datée de Hambourg le 11 Juillet, qui communique son nouveau plan de prénumeration sur sept mémoires d'histoire naturelle, & qui envoie plusieurs exemplaires de son mémoire préliminaire sur l'Astèrie de Pline, qui a été lu à l'Académie: (voyez ci-dessus le 24 Février) ainsi qu'un échantillon de l'agathe blanchâtre à couleurs d'Iris, dont il avoit communiqué à l'Académie la déscription en 1781.

Le 22 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé au cabinet d'Hiſtoire naturelle, quelques articulations du pavé des géants dans le comté d'Antrim en Irlande, dont elle a fait préſent à l'Académie.

Le Secrétaire a expoſé & remis de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris, le buſte de M. d'Alembert en plâtre, fait par M. le Comte en 1773. Ce préſent a été reçu avec remercimens & transporté à la Bibliotheque académique, dont il fait l'ornement.

Le même a préſenté

1.) de la part de la Société libre économique de St. Pétersbourg: Продолженїи трудовъ вольнаго Экономическаго общества часть V. 8vo.

2.) de la part de l'Académie Royale des Sciences de Berlin: *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Pruſſe, année* 1782, *avec l'Hiſtoire pour la même année.* 4to. & *Diſſertations ſur l'univerſalité de la langue françoiſe, qui ont partagé le Prix adjugé par l'Académie le* 3 *Juin* 1784. 4to.

3.) de la part de la Société royale des Sciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXXV. for the Year* 1785. *Pars I.* 4to.

4.) de la part de la Société électorale de Météorologie de Manheim: *Obſervationes meteorologicae anni* 1782. *in compendium redactae a Carolo Koenig. Manhemii* 4to.

5.) de la part des auteurs: I. *Oryctographia Carniolica: Oder Phyſicaliſche Erdbeſchreibung des Herzogthums Krain, Iſtrien und zum Theil der benachbarten Länder. I. II. III. Theil.* 4to. *Leipzig* 1784. dont le troiſieme volume eſt dédié à l'Académie. II. *Plantae Alpinae carniolicae. Collegit*

legit & descripsit Hacquet M. D. Viennae 1782. 4^{to}. III. *Lettera adeporica del Signor Professore Hacquet al Signore Cavaliere di Born.* 4^{to}: avec une lettre de M. Hacquet datée de Lublana, le 1 Septembre 1784, & écrite en slavon avec la traduction françoise à coté. IV. *An experimental Inquiry in to the cause of the permanent colours of opake Bodies, by Edward Hussey Delaval.* 8^{vo}. *Warrington* 1785. V. *Lithophylacium Mitisianum a Francisco Güssmann* 8^{vo}. *Viennae* 1785, avec une lettre de l'auteur. VI. *Martini tractatus de Religionis necessitate summa in societate ciuili.* 8^{vo}. *Harderovici* 1785. Enfin

6.) de la part des éditeurs: *Johann Heinrich Lambert's deutscher gelehrter Briefwechsel. Des fünften und lezten Bandes* 1^{ter} *Theil.* 8^{vo}. *Berlin* 1785: publié par M. Jean Bernoulli, Astronome Royal à Berlin. Et *Isaaci Newtoni opera quae extant omnia, commentariis illustrata a Samuele Horsley.* 4^{to}. *Tom. V. Londini* 1785.

Le 25 Août. Le Secrétaire a communiqué de la part d'un auteur anonyme: *Vuës patriotiques sur l'établissement d'une Académie encyclopédique & populaire en Brétagne: par un Bréton.* 8^{vo}.

Le 1 Septembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé, pour être présenté de la part des héritiers du feu Conseiller d'Etat actuel de Stèhlin, un ouvrage manuscript du defunt Académicien, intitulé: *Histoire littéraire de la vie de Pierre le Grand en Médailles*: медали на знатнѣйшія приключенія геройской жизни и достохвальнаго Государствованія Петра великаго Императора. Cet ouvrage a été reçu avec reconnoissance & déposé à la Bibliotheque.

Le

Le même 1 Septembre. M. l'Adjoint Gollovin a préfenté de la part de l'auteur, M. Kriftinin, Citoyen d'Archangel: Историческiи опытъ о сельскомъ старинномъ Домостроитильствѣ Двинскаго народа въ Сѣверѣ. Ce manufcript eft une continuation de l'hiftoire des anciens habitans d'Archangel du même auteur, imprimée, il y a quelques années, fous l'approbation & aux depens de l'Académie.

Le 5 Septembre. Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé de la part de Sa Majefté l'Impératrice, pour être confervé au cabinet d'Hiftoire naturelle, une coralline noire d'Afrique, *Gorgonia* ou Lithophyte, d'une grandeur extraordinaire & d'un cru magnifique: & pour la Bibliotheque, un manufcript réligieux ancien & très rare, écrit en latin fur du vélin, avec des lettres gothiques façonnées & peintes en diverfes couleurs.

M. le Confeiller de Collèges Pallas a remis par ordre de Sa Majefté Impériale, la copie d'une infcription antique, trouvée fur un tombeau & envoyée par M. de Jacobi, Gouverneur-Général d'Irkoutzk, avec une explication & défcription en langue ruffe.

Le même Académicien a préfenté le profpectus de la *Collection polygraphique fur la Médecine, la Phyfique & l'Hiftoire naturelle, par une Société de Médecins & Phyficiens*: propofée par foufcription, & devant paroître à Paris.

Le Secrétaire a remis pour la Bibliotheque, de la part de la Société établie à Amfterdam pour rappeller à la vie les noyés: *Hiftoire & mémoires de la Société établie pour la confervation des noyés.* Tom. III. Part. 2. 8vo. Et de la part de M. de Magellan: *An Ancount of the Foxglove and fome of*

its

its medical Uſes, by Will. Withering M. D. Birmingham 1785. 8vo. Enfin le Proſpectus de l'ouvrage hollandois: *Allgemeen Magazyn van Weetenſchap, Konſt en Smaak.*

Le 12 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris: 1.) *Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences avec les mémoires de Mathématique & de Phyſique Années* 1780 *&* 1781. 2.) *Connoiſſance des temps ou expoſition du mouvement des Aſtres pour l'Année* 1787. Et de la part des auteurs M. M. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune: *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts*: douze cahiers, Avril 1784 — Mars 1785 incluſivement.

—— —— il lut une lettre de M. le Conſeiller de Guerre Merk, datée de Darmſtadt le 1 Juillet, qui envoie un mémoire manuſcript *Sur les dents foſſiles de Rhinoceros, qui ſe trouvent en Allemagne & ſurtout ſur celles de l'eſpèce à deux cornes*: avec quatre planches gravées, dont deux repréſentent un ſquelette de la Giraffe nouvellement deſſiné, & une tête du *Crocodylus longiroſtris*, que M. Merk a trouvée parfaitement pétrifiée & presque entière dans un Géode de marbre d'Altorf. Enfin un exemplaire de deux lettres imprimées & adreſſées en 1782 & 1784, à M. le Conſeiller d'Etat actuel de Kruſe: *Sur les os foſſiles d'Eléphans & de Rhinoceros* qui ſe trouvent dans le païs de Heſſe-Darmſtadt.

Le 19 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la veuve du Conſeiller d'Etat actuel de Stèhlin, l'ouvrage que cet Académicien a fait imprimer en Allemagne peu de temps avant ſon décès: *Original Anecdoten von Peter dem Groſsen, aus dem Munde angeſehener Perſonen zu Moskau und Peters-*

tersburg vernommen, und der Vergessenheit entrissen von Jacob von Stählin. 8vo. *Leipzig* 1785.

Le 29 September. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm: *Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar Tom. V. för År* 1784. *Part.* 1. 2. 3. 4. *Tom. VI. för År* 1785. *Part.* 1. 2. & *Noua acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Vol. IV.*

& de la part de l'Auteur: *Pauli Frisii Operum Tom. I. Algebram et Geometriam analyticam continens.*

Le 3 Octobre. Le Secrétaire a lu deux lettres de M. l'abbé Soulavie adressées à Madame la Princesse de Daschkaw & à lui, & datées de Paris le 17 Mars, qui envoie son ouvrage sur l'histoire naturelle de la France méridionale en huit volumes, in 8vo.

Le 13 Octobre. M. le Conseiller de Cour Kotelnikof a exposé un foetus humain sans crâne, que M. le Conseiller de Collèges Pouzyrefski lui a envoyé pour le cabinet académique. Cette piece a été trouvée mériter une place parmi la belle collection de monstres que possede l'Académie.

Le 24 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. van Marum, Docteur en Médecine & Directeur du cabinet d'histoire naturelle de la Société Hollandoise des Sciences à Harlem, datée du 30 Juin, qui envoie le premier volume du bel ouvrage intitulé: *Déscription d'une très grande machine électrique placée dans le Museum de Teyler à Harlem, & des expériments faits par le moyen de cette machine*: imprimée en hollandois & en françois. 4to.

Le

Le même 24 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conseiller de Cour Hablitzl', datée de Moscou le 13 Octobre, qui envoie une caisse contenant les fossiles & semences qu'il avoit cueillies pour l'Académie, pendant son séjour en Crimée.

Le 31 Octobre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. l'abbé Rochon, qui à été reçu au nombre des Associés externes le 13 Juin.

Le 3 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être présenté à l'Académie, de la part de M. Bugge, Conseiller de Justice & Astronome Royal à Copenhague: un *Atlas de Dannemarc*, contenant sept cartes savoir une générale & six particulieres. Ensuite *Obseruationes astronomicae annis* 1781. 82. *&* 83. *institutae in obseruatorio regio Havniensi, & cum tabulis astronomicis comparatae. Auctore Thoma Bugge. Havniae* 1784. *in* 4^to^.

Le 7 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à l'Académie, par M. le Conseiller de Mines Müller à Halle en Saxe, qui envoie le prospectus de deux ouvrages périodique de Medecine & de Chirurgie.

Le 14 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de Son Exellence Madame la Princesse de Daschkaw, pour être déposé au cabinet d'histoire naturelle, un crystal d'alun d'une grandeur extraordinaire & très parfaitement figuré, qu'elle venoit de recevoir de l'Angleterre, & dont elle a fait présent à l'Académie.

——— ——— il a lu une lettre adressée à Mrs. de l'Académie, par M. Janin de Combe-Blanche, Chirurgien Oculiste & Membre du Collège Royal de Chirurgie de la ville de Lyon, datée du 26 Juillet, qui envoie: *Mémoires & obſervations anatomiques, phyſiologiques, & phyſiques ſur l'oeil & ſur les maladies qui affectent cet organe. Paris* 1782. un volume in 8^{vo}, avec onze petites brochures ſur les antiméphitiques & le magnétisme animal.

Le 17 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Bode Aſtronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, qui communique à l'Académie les obſervations des ſatellites de Jupiter qui ſont parvenues à ſa connoiſſance, pour pouvoir les comparer avec les correſpondantes, qui ont été faites en divers endroits de la Ruſſie par Mrs. Inohodzof & Tſchernoi.

Le 1 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothéque de l'Académie, un exemplaire de la déſcription phyſique du territoire de la Tauride par M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', imprimée en ruſſe, *gr. in folio* & intitulée: Физическое описанїе Таврической области.

M. le Conſeiller de Colleges & Chevalier Pallas a communiqué des lettres de M. Jährig, & remis de ſa part les herbes & graines qu'il en avoit nouvellement reçu.

Le 5 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hermann, datée de Cathérinbourg le 4 Novembre, qui envoie en manuſcript: *Nachricht von der Ausbeute der Bergwerke im ruſſiſchen Reiche.*

Le 15 Décembre. Madame la Princeſſe a envoyé pour le cabinet d'hiſtoire naturelle, pluſieurs coquilles, coraux, plantes & inſectes marines, qu'elle venoit de recevoir du Gouvernement d'Archangel, & dont elle a fait préſent à l'Académie.

Le

Le Secrétaire a lu deux lettres de M. de Magellan, datées de Londres le 9 Septembre & 18 Novembre, qui communique diverses nouvelles littéraires & qui envoie de la part de la Société Royale des Sciences: *Philosophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXV. of the Year* 1785. *Part. II.*

M. le Professeur Ferber a remis le prospectus d'un ouvrage, que M. le Professeur Norberg promet de publier par la voie de la Souscription: c'est son *Opus Syriaco-Hexaplare.* L'Académie y a souscrit.

Le 27 Décembre. Assemblée solemnelle tenue pour célébrer la *60me* anniversaire de la fondation de l'Académie, & pour adjuger le Prix de minéralogie, proposé en 1783. Voyez en le recit ci-dessus pag. 7.

Le Secrétaire a continué de présenter, les observations météorologiques faites à Moscou & à Berlin, & communiquées à l'Académie, les premieres par M. le Conseiller de Cour & Chevalier Stritter, & les dernieres par M. l'Académicien Beguelin.

Déſcription de douze monnoyes aſiatiques d'argent, d'une antiquité très reculée, envoyées au médailler académique, de la part de SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE.

par
Mr. *P. S. PALLAS.*

Communiquée à l'Académie le 17 Janvier. 1785.

Les monnoyes antiques trouvées dans le Gouvernement de Smolensk qui m'ont été confiées par ordre de Sa Majeſté Impériale, ſont proprement de deux eſpèces abſolument différentes. Les trois ornées de portraits & de figures, ſont certainement antérieures à Mahomet, & plus antiques que tout le reſte. Celles qui ne portent que de ſimples inſcriptions arabes appartiennent aux Califes du huitieme & neuvieme ſiecle de nôtre ére chrétienne. Je commencerai par celles-ci, parceque j'en ai une notion plus claire.

Toutes ces monnoyes cottées A, & numerotées au nombre de neuf, portent des deux cotés, tant ſur le diſque que par la circonférence, des inſcriptions arabes en caracteres kufiques. Ce caractere, que l'on trouve auſſi dans les épitaphes & inſcriptions anciennes, n'eſt plus employé aujourd'hui ni des arabes, ni des autres nations mahométanes. Il n'y a que peu de ſçavans parmi ces nations, & encore moins parmi nos litterateurs européens, qui ſoyent en état de le lire. Ce caractere étoit en uſage chez les Arabes

rabes avant & pendant les premiers âges après Mahomet. Il dérive du caractere Caldéen & Syrien antique, connû des sçavans sous le nom d'Estranghelo. Le nom qu'on lui a donné, semble dériver de la ville de Kufa, située sur un bras de l'Euphrate, sous 31 degr. 50 min. de latitude, & environ 69$^{d.}$ de longitude, dans l'Irak-Arabi, qui est l'ancienne Caldée. Les copies les plus anciennes & les plus éstimées du Koran, ont été écrites dans cette ville du même caractere qui en a conservé le nom.

Je dois observer, que beaucoup de ces monnoyes en argent, à inscriptions kufiques, ont été trouvées dans différents pays, voisins de la mer baltique, même jusqu'en Prusse & en Poméranie; soit que le commerce les ait répandu jusques là, ou que les Chevaliers Teutons ou autres, les eussent rapporté des croisades. Le célébre Kehr, trés-versé dans la littérature orientale, en a décrit de tout semblables aux nôtres, qui furent trouvées dans le sable des côtes baltiques prés de Dantzig; & le Professeur Tychsen à Bützow a annoncé récemment de semblables découvertes, faites en Poméranie.

Aucun des interprètes tatares au Collége des affaires étrangeres, n'a pû déchiffrer l'inscription kufique des monnoyes en question. Heureusement j'ai trouvé un Moullah tatare qui, à l'aide d'un alphabet Syro-Caldéen, m'a assisté à lire & à traduire le plus essentiel de ces inscriptions. Celles du milieu ne consistent qu'en formules sacrées, analogues à la croyance mahometane, & il suffira de donner pour échantillon les deux qui se trouvent répétées sur cinq d'entre les neuf monnoyes.

On

On lit ſur l'un des cotés de la médaille A. N°. 1. cette formule arabe:

Allah - *abhad* — *Allah* *iſſamat* — *Läm* - *ŷaelit*
Dieu (eſt) un — Dieu (eſt) éternel — pas n'engendre
Welem - *youlat* — *Welem* *yakun* - *lahu* - *koyen* — *abhadon.*
ni n'eſt-engendré — ni n'exiſte-t-il-à lui-ſemblable — aucun.

De l'autre coté on lit ſur le milieu du disque:

Mohammadon - *raſſoulo* - *Uahi* —
Mahomet (eſt) prophéte (de) Dieu —
arſſalahò - *byll* - *hoda* - *wadini* - *l'hakki* —
(qui) l'a envoyé avec voye & réligion vraye —
leyodh' - *ſherahò* - *alla* — *dini* - *kolléhi* —
pour illuſtre (la) rendre — au deſſus de toute réligion
valao - *kyrehà* - *l'moſchrekouna.*
quoiqu'en reculent les idolâtres.

La circonférence de cette médaille porte, qu'elle a été frappée au nom de Dieu dans la ville de Khomis, ou Phomis, (incertitude occaſionnée par le defaut de ponctuation dans le caractere kufique,) l'année 7065, qui doit apparemment dater de la création du monde, ſelon l'éſtime des Arabes.

La monnoye N°. 2. A. porte préciſement les mêmes formules ſur le disque; & la circonférence annonce qu'elle a été frappée l'an 160 Hégire, qui revient à peu près à l'an 776 de nôtre ére chrétienne, dans la ville de Damask.

Sur le N°. 3. A. où les formules ſont exactement les mêmes, l'inſcription en cercle porte l'année 68 de Hégire, ce ce qui annonce une antiquité ſupérieure à toutes les autres. Le nom de la ville, où cette monnoye fut frappée, eſt énoncé Sannôuà.

Sur les N°. 4 & 5 A. qui ſont d'une grandeur différente, les formules du disque ſont encore les mêmes. L'année marquée ſur la plus grande de ces monnoyes eſt la 111. de Hégire, ou 737 de nôtre ére; & ſur la petite 123 de Hégire; pour toutes les deux, le nom de la ville eſt Oûaſtha, ou Waſſetha, qui eſt ſituée dans l'Irac-Arabi, ſur les deux bords du Tygre, ſous 32 degrés 20 min. de latitude, à une diſtance à peu près égale, entre Baſſora, Bagdad, Kufa & Ahwas, d'ou ſon nom, qui ſignifie ville du milieu, peut avoir tiré ſon origine.

Le N°. 6. A. ne différe des précédentes, que par la mauvaiſe expreſſion des caracteres, & par l'année 167 de Hégire.

Les trois monnoyes N°. 7. 8 & 9. A. ſont toutes de la même ville d'Oûaſtha & d'années peu éloignées. Mais l'inſcription du milieu y eſt différente des ſix premieres, & contient plus en abrégé, des ſentences à peu près analogues ſur Dieu & Mahomet, qu'il ſeroit ſuperflû de répéter tout au long. Sur aucune de toutes ces neuf monnoyes arabes, aucun nom de Calife ne ſe trouve énoncé.

Je paſſe aux trois monnoyes cottées B, qui ſont totalement différentes des neuf premieres & d'une antiquité plus réculée. Elles ont aſſez de rapports entr'elles pour décider de leur origine commune, mais toutes mes perquiſitions jusqu'ici n'ont encore pû me conduire à aucun degré de certitude ſur cette origine. Le coſtume des portraits, qui ſur toutes ſont ornés d'une mitre royale ſurmontée de deux ailes, ou d'un

 panache

panache partagé, approche de l'ancien coſtume Perſan, & les caracteres de l'inſcription ont un rapport marqué avec le Zend ou ancien Perſan. Mais il m'a été impoſſible de rien déchiffrer d'intelligible, même à l'aide du ſusdit alphabet, & perſonne des Arméniens & Tatares que j'ai conſultés ici, n'a pû y lire la moindre choſe.

Sur une de ces monnoyes, qui ſemble la plus ancienne, le portrait eſt ſans barbe & la mître à quelqu'apparence d'un casque, ſur lequel on voit, entre les deux ailes, un globe ſoutenû d'un demi-cercle. Des épaules s'élevent deux cordons tortillés, terminés par une houpe. Les caracteres du bord ſont un peu différens & presque ſemblables à ceux qu'on trouve ſur des monnoyes Puniques. Le revers montre très diſtinctement une colonne au milieu, ſurmontée d'une pointe conique. Mais aux deux cotés de cette colonne ſe trouvent des corps très-informes, qu'on ne ſauroit bien comparer à aucune figure connue, excepté peut-être à des carquois.

Sur les deux autres, la tête du portrait eſt barbue & la mitre ſurmontée, entre les deux ailes, d'une demi-lune avec un point. La demi-lune ſe trouve encore trois fois répétée ſur les bords avec une étoile, & il eſt remarquable, que ſur la plus antique de ces monnoyes, ainſi que ſur l'une des deux dernieres, la demi-lune & l'étoile ſe trouvent auſſi fort bien marquées ſur le revers, aux cotés de la pointe de la colonne. Mais cette colonne eſt moins diſtincte ſur les dernières, & les deux figures qui l'accompagnent, ont quelque reſſemblance avec des hommes debout & en longues robes. Les revers ont auſſi les bords marqués de demi-lunes & d'étoiles.

Parmi

Parmi les caracteres de ces trois monnoyes, on n'a pu débrouiller que ceux, qui se voyent sur le bord de la plus petite, du coté du portrait ١٥٢١, lesquels par leur ressemblance aux caracteres numériques des Arabes, pourroient signifier le nombre 1521. Mais comment concilier ce nombre avec aucune des éres reçues chez les orientaux, qui comptent ou depuis la création du monde, ou depuis Abraham, ou enfin depuis Mahomet? Je dois à l'égard de ces trois monnoyes avouer mon ignorance, jusqu'à ce que le hazard m'en fournisse la comparaison, ou bien l'explication.

Déscription de cinq petites monnoyes d'argent, trouvées dans le Gouvernement de Pleskow, & remises par ordre de Sa Majesté L'Impératrice au médailler académique, le 24 Février 1785.

Ces médailles trouvées dans le Gouvernement de Pskow ou de Pleskow, sont européennes, & dâtent des temps gothiques après Charlemagne. Elles sont en partie de l'espéce, qu'on appelle Bractéates, & leurs inscriptions sont en partie illisibles. Une des mieux prononcées est le N°. 1, qui représente d'un coté une tête en face, couronnée & barbue avec l'inscription:

CHVONRADVS IMP.

ou Conrad Empereur. Le révers montre sur les bords quatre demi-cercles, contenant de petits visages imparfaits, & l'inscription au milieu:

B
V
✠ DIVS
R
G

N°. 2. repréſente une tête en profil, avec une couronne dentelée & un ſceptre devant ſoi. L'inſcription contient M. PICVS. T. I. Seroit-ce le tête d'un des Picus ſeigneurs de Mirandola? Sur le revers, on lit au bord: STAV. TRVR. & au milieu BRVT.

N°. 3. Bractéate qui porte d'un coté, une tête couronnée, en face & barbue; l'inſcription fort mal exprimée, ne laiſſe diſtinguer que ces lettres I I A M. Sur le revers, une tête de Sainte entourée d'un cercle au lieu de gloire: l'inſcription O T H A ou bien V T H A.

N°. 4. Une figure groſſiere, compoſée de points detachés, & repréſentant un homme à mi-corps, tenant de ſa gauche une eſpèce de ſceptre ſurmonté d'une croix, de l'autre une croſſe épiſcopale; l'inſcription eſt tout à fait illiſible. Le revers repréſente au bas un écuſſon fendu perpendiculairement en trois champs: au deſſus on peut lire E C T I, & ſur le bord H. M. Le reſte eſt indéchifrable.

N°. 5. D'un coté: main formée avec des lignes rélévées, & dans le cercle qui la renferme, d'un coté C V. de l'autre T. Autour de ce cercle on diſtingue ſeulement b \ I T. Le revers eſt une roüe à croix, avec quatre points.

P. S. Pallas.

Expli-

Explication de quinze monnoyes antiques, trouvées au Gouvernement de Pleskow & envoyées par ordre de Sa Majeste L'Imperatrice, au cabinet académique, le 2 Mai 1785.

Les dernieres quinze médailles qui m'ont été remiſes par ordre de Sa Majeſté Impériale ſont, comme les précédentes, du neuvieme ou dixieme ſiecle, & appartiennent en partie à des Rois de Suede, ou à des Éveques & à des villes. Sans prétendre vouloir les éclaircir par l'hiſtoire, je me borne à en donner ici la déſcription & ce que j'ai trouvé liſible de leurs inſcriptions latines:

N°. 1. Médaillon de tête mal caracteriſée, avec un ſceptre & l'inſcription: ANΓLOMENTA.

Au revers: la croix ordinaire ſur les monnoyes de Suêde de ce temps, avec l'inſcription:

OLOF. RX. EVINAHM.

N°. 2. Médaillon de tête ſemblable, avec cette inſcription:

HERIECVS. EX.

Au revers on lit en trois partitions VƆƆV / BRVN / ƆOᗡᗡ Brundoc-cuſſa.

N°. 3. Tête couronnée avec un ſceptre ſurmonté d'une croix, & la même inſcription: HENRICVS REX. Au revers les mots de la monnoye précedente avec quelques changemens ƆƆOᗡ / BRVN / AƆƆV Brundoc-cuſſa.

N°. 4. Tête couronnée avec cette inſcription:

MEVVEMON.

Au revers, la croix avec des lettres arrangées entre les branches de cette croix qui forment cet enſemble × AHTHON.

N°. 5. Une eſpèce de chapelle avec cette épigraphe:

SANCTA COLONIA.

Au revers, la croix avec des lettres rangées entre ſes branches, que l'on pourroit lire comme PILICRIN. La circonférence ſemble porter

CHVONRADVS IMP.

N°. 6. Une tête barbue; de l'inſcription il ne reſte que les lettres —INRI—

Le revers repréſente une porte entre deux tourelles, ſurmontée d'une croix; l'épigraphe eſt tout à fait illiſible.

N°. 7. Une inſcription en lettres inégales, dont les grandes, avec le ſigne millenaire ∞, qui ſe trouve au deſſus, ſemblent indiquer l'année. L'inſcription eſt

coLoNII

A.

Le revers porte la croix & ces mots:

ODTO & MKVN.

N°. 8.

N°. 8. Figure à demicorps, qui tient de la droite une croſſe épiſcopale, & une croix de la gauche; l'inſcription eſt ponctuée:

SCS. MART. INVS. COV.

Au revers, ſur le milieu S⌶RAIECTVM, une eſpéce d'écuſſon au bas, & ſur la circonférence:

DERNOLPVS EPISCOP.

N°. 9. Figure ſemblable à la précedente, mais les inſcriptions me ſont indéchifrables.

N°. 10. Un viſage, autour duquel il ne reſte que ces lettres liſibles ALBE—

Sur le revers, une roſe & autour —NANT+

N°. 11. Une tête barbue en face, ſemblable à un Eccehomo; ſur le contour +HEIN—

Au revers, une repréſentation de moulin à bateau, & l'inſcription quoique un peu éffacée:

VRBS HOSVM.

N°. 12. Une tête en face, ſemblable au N°. 11. ſans lettres apparentes.

Au revers, la meme figure, avec une inſcription totalement effacée.

N°. 13. Figure informe, tenant une croix; l'inſcription du contour S—ΛΓERTVS.

Au

Au revers, une croix avec trois ſegments de cercle, & ſur le contour BRCI=LAVS. DVX.

N°. 14. Un portique, ſous lequel on voit les deux lettres A M, une croix en ſautoir, & l'inſcription

+THA-NAR.

Au revers la croix, avec des fleurs de lys entre ſes branches & l'inſcription en partie éffacée

— CVS DENTO.

N°. 15. Monnoye dont le travail ſemble d'une antiquité plus réculée que les autres. D'un coté une tête en face, dont l'inſcription eſt éffacée. Au revers quatre demicercles appuyés ſur les bords, entre les-

V

quels on lit ces lettres +DIV=.

R

P. S. Pallas.

Extrait

Extrait
d'une lettre de M. Patrin, à M. le Conseiller de Colléges Pallas, datée d'Irkoutzk le 1er Janvier 1785.

Vous connoissez fort bien ce minérai ferrugineux, qui sert de matrice aux schörls verds, ou si vous voulez, à ces mauvaises émeraudes qui se trouvent mêlées & confondues avec du fluss-spath verd, des crystaux de montagne noirs, & des topases: eh bien, ce minérai de fer est riche en or, surtout celui qui est sous la forme de mine spéculaire, dont une partie est en lames irrégulieres, & une partie disposées en pyramides applaties: on ne m'a point encore instruit de la proportion du métal précieux. J'avois ici un petit échantillon de ce minérai, je l'ai cédé à M. Karamyschef, pour le mettre à la sauce qu'il jugera à propos: peut-être qu'il vous en rendra compte. Au reste, le minérai dont je parle, vient d'une montagne nommée par les Toungouses Одинъ-челону (*Odin tschelonu*), située entre les rivieres Ононъ-борза (*Onon-borsa*), & Тургa (*Turga*), dont le filon contient outre ce minérai ferrugineux, 1°. de mauvaises topases blanchâtres, crystallisées en prismes tétragones comprimés à leurs extrémités en forme de coin, plus ou moins régulierement; 2°. de crystaux de roches noirâtres, terminées comme à l'ordinaire par une pyramide hexagone; 3°. de schörls verds toujours hexagones & très régulierement crystallisés, d'un diamètre parfaitement égal dans toute leur longueur, qui est quelquefois de 7 à 8 pouces sur un diamètre de plus d'un pouce. Les deux extrémités de ces crystaux sont pour l'ordinaire tronquées, exactement planées & polies; cependant j'ai vu dans une collection qui a été envoyée ici,

ici, un de ces cryſtaux d'environ 8 lignes de diamètre ſur 5 à 6 pouces de longueur, qui avoit un accident qui m'a paru très remarquable; c'eſt qu'une de ſes extrémités, au lieu d'être plane, étoit relevée d'une proéminence entiérement ſemblable à l'articulation des grandes colonnes de baſalte ordinaire; & cela me paroit confirmer la dénomination, qui leur a été donnée de ſchörls, puisque les ſchörls ne ſont que des baſaltes en miniature. Au ſurplus, ces cryſtalliſations vertes ſe trouvent quelquefois enclavées tout au travers des cryſtaux noirs, ſans que ni la couleur, ni la cryſtalliſation des uns ni des autres en ſoit altérée, & ſans qu'il y ait le moindre mélange, ce qui eſt fort ſingulier; car on voit clairement, qu'il y a une pénétration mutuelle, & que les deux ſubſtances des cryſtaux verds & des cryſtaux noirs, ſe ſont trouvées en diſſolution dans le même temps, & qu'ils ſe ſont auſſi dans le même temps cryſtalliſées; la nature a formé par là de très beaux accidents, & l'on voit qu'elle ſongeoit à votre cabinet; car M. Laxmann aiant fait un long ſéjour dans le voiſinage de cette montagne, je ne doute pas que vous ne ſoyez abondamment pourvu de ces cryſtalliſations: pour moi je n'ai eu que le plaiſir de voir, & le chagrin de ne pas avoir celles dont je parle.

Par la lettre que vous écrivez à M. Karamyſchef & qu'il a bien voulu me communiquer, je vois qu'on a trouvé dans les ſteppes des Kirghiſes une riche mine d'éméraudes. Cette trouvaille vaut mieux que celle du Lapis Lazuli faite au Coultuc, dont l'origine n'eſt pas connue, & dont les morceaux qui j'ai vus, ont été roulés pendant quinze ſiecles.

Par la même lettre je vois, que vous déſirez des ſemences de la *Swerta corniculata* & du *Pyrus baccata*. Comme je m'en trouve quelque peu, que j'avois pris ſeulement pour échan-

échantillon, j'ai l'honneur de vous les envoier. Il n'y a plus ici de Яблочки (*des pommes*), on les a toutes mangées, mais dans quelques jours on en aportera de l'autre coté du Baïkal & nous pourrons vous en fournir une provision. En attendant vous trouverez dans la petite boete ici-jointe, un exemplaire frais de l'arbre en fleur, & 5 ou 6 autres plantes, entre autres ce *Delphinium* à petites fleurs blanches, qui me paroit très distinct du *Delphinium elatum*: j'y joins les graines, de même que d'un astragale à tige ligneuse qui me paroit différent d'un autre astragale frutescent des environs de l'Ouba, que vous avez reçu, & avec lequel je ne puis le comparer n'aiant point ici mon herbier. Je n'ai même aucuns livres, attendu que je ne croiois demeurer ici que quelques semaines; & ceux de M. Karamyschef sont, à ce qu'il m'a dit, entassés dans des coffres. C'est pourquoi je vous supplie de me dire ce que c'est que cette labiée qu'on nommé ici мята (*Miäta*), & qui a une odeur de citron, laquelle ne me paroit pas une *Mentha*, mais une *Nepeta*: elle est fort commune aux environs d'Irkoutzk & de Nertschinsk, mais je ne me rappelle pas de l'avoir vu autre part. Elle est remarquable par la disposition de ses épis, dont les fleurs sont entiérement tournées d'un seul coté, l'autre coté n'offrant qu'une double série de stipules.

Sur la Congélation du Mercure.

Dans une lettre d'Irkutzk du 18 Mai 1784. M. le Conſeiller de Cour Laxmann avoit rendu compte des obſervations, que l'Académie l'avoit chargé de faire en Sibérie ſur la congélation du mercure par le froid naturel. Il réſultoit de ces obſervations, qu'un froid de 32 degrés de Réaumur, qui en font 210 de Délisle, ſuffiſoit déja pour la congélation de ce fluide métallique, lors qu'il n'étoit pas plus purifié que de coûtume.

Les eſſais que Mrs. les Académiciens de St. Pétersbourg ont faits à ce ſujet, ont pleinement conſtaté ces obſervations. Le froid du vendredi 10 Janvier 1785 ſe trouvant à 22 d. de Réaumur, & ayant, par un mélange de neige & d'eſprit de nître, été augmenté jusqu'à 30, le mercure purifié par l'antimoine entra en congélation. Cette expérience détermine déja aſſés près le vrai point de la congélation du mercure, & ſert encore à donner une juſte idée du froid de la Sibérie: car puisqu'il conſte par le témoignage de pluſieurs perſonnes dignes de foi, que le mercure purifié s'y congele par le froid naturel, il s'enſuit qu'on n'a plus de raiſon de regarder comme impur le mercure auquel cela arrive, ni de ſe faire des idées exagérées du froid de la Sibérie. Cependant comme M. Laxmann croit dans la lettre ſusdite, pouvoir conclure d'après certaines obſervations, qu'en pouſſant la purification du mercure plus loin qu'elle n'a lieu ordinairement par l'antimoine, un froid beaucoup plus grand, ſupérieur même à tous ceux que la Sibérie éprouve, n'opéreroit plus la congélation ſusdite; tandis qu'au contraire des expériences faites à la baye de Hudſon, établiſſent avec une non moindre vraiſemblance, que le mercure le plus exactement purifié entre en congélation au

32

32 d. de Réaumur, Mrs. le Prof. Krafft & le Secrétaire ont refait au commencement de Février de cette même année 1785, diverſes nouvelles expériences dont nous allons donner le résultat.

Le 2 Février matin, le froid naturel ayant été de 17 degrés, & ayant diminué pendant les expériences jusqu'au 15^{me} d., Mrs. les Académiciens plongérent un thermomètre d'eſprit de vin rectifié, dans de petits vaſes remplis de mercure purifié de différentes manieres: ils enfoncérent enſuite ſucceſſivement ces vaſes dans des mélanges de neige & d'eſprit de nître fumant, où ils mirent encore ſéparément un thermomètre à mercure.

Le mercure revivifié du ſublimé corroſif ſe géla au moment que l'un & l'autre thermomètre indiqua un froid de 31 degrés de Réaumur.

Le mercure diſtillé du cinnabre entra déja en congélation, quand le thermomètre d'eſprit de vin n'étoit qu'au 29 degré. Dans l'autre thermomètre le mercure s'étoit précipité entiérement dans la boule.

Le mercure dépuré par ſoi-même commença à ſe géler, lorsque l'un & l'autre thermomètre parvint au 30^{me} degré.

Le 15 Février matin, le froid naturel ayant été de $19\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur, ayant fait remplir des tuyaux de thermomètre de mêmes diverſes eſpéces de mercure, dont ils voulurent déterminer le point de congélation, nos Académiciens les plongerent immédiatement dans des mélanges de neige & d'eſprit de nître fumant.

Le thermomètre rempli du mercure dépuré par soi même s'arreta au 32 degré, mais le mercure ne se trouva pas encore entiérement gélé, quoique le diamètre du tuyeau fut très petit; ce qu'on pouvoit voir très distinctement par la bulle d'air qui montoit dans la boule en renversant l'instrument. On le remit sur cela dans un nouveau mélange, & le thermomètre qui étoit encore à 32 degré, se précipita dans un instant presqu'imperceptible, jusqu'au 46^{me} degré, où le mercure se trouva entiérement gélé & solide.

On observa à peu près les mêmes phénomènes en employant les thermomètres remplis avec les autres espéces de mercure: tous s'arréterent d'abord au 30^{me} degré, tantôt plus tantôt moins, sans que pour cela le mercure dans la boule eut perdu sa fluidité; mais il devint tout à fait solide en plogeant le même thermomètre dans un second mélange, dans lequel le mercure tomba tantôt au 46 tantôt au 50^{me} degré, ce qui prouve au moins qu'aucune des susdites espèces de mercure ne demande un froid plus violent que de 50 degrés de Reaumur, pour que sa masse devienne entierement gélée; d'où les expériences de feu M. Braun sont déja beaucoup rectifiées.

On voit au reste par ces dernieres expériences que le phénomène de la congélation du mercure est encore enveloppé dans des brouillards très épais, qui ne sauroient être dissipés que par des expériences réïterées & variées de différentes manieres: c'est à quoi aussi nos Académiciens se proposent de songer dans la suite.

Sur

Sur l'Analyſe chymique de quelques minéraux remarquables.

Lettre de M. Raspe adreſſée à M. le Conſeiller de Colléges Pallas & lue à l'Académie le 23 May. 1785.

Entral bey Mamborn in Cornwallis den 5 Martz 1785.

Unter einer Menge zu unterſuchenden Stuffen und Bergarten wurden mir im vorigen Januar ein leberfarbner ſchwartzgeſtreifter ungemein ſchwerer feldſpathartiger Stein, und ein andrer ſchwarzbrauner und mulmigter überbracht, die ſich von zwey neuentdekten mächtigen Gängen herſchreiben. Jhre ausnehmende ſpecifiſche Schwere brachte mich natürlicher Weiſe auf den Gedanken daſs ſie zum Geſchlecht des Schwerſteins oder Tungſteins gehören mögten, worin ich mich auch nicht irrte: ſie veranlaſste mich aber auch, ſie im ſtärckſten Schmelzfeuer zu probiren, nach verſchiedenen Methoden auf Metall. Der Erfolg übertraf meine Erwartung. Sie gaben nicht nur reichlich ein und ebendaſſelbe Metall, ſondern auch, und das war ein neues Phänomen für mich, ein Metall deſsen gröſter Theil von allen bekannten Metallen und Halbmetallen, ſo viel ich noch einſehen kann, verſchieden iſt.

Daſs die Schwer- oder Tungſteine Eiſen enthalten, hatte Cronſtädt ſchon vor vielen Jahren in den Schwediſchen Abhandlungen von 1751, und Rinmann eben daſelbſt im Jahrgange 1754 geſagt; daſs ſie aus Kalk, Kieſelerde, etwas Eiſen und einer eigenthümlichen Säure beſtehen oder beſtehen ſollen, wuſsten wir aus Schechtens Beobachtungen im Jahr 1781. Daſs ſie ein anderes Metall als Eiſen, ein eigenthümliches neues Metall enthalten, und daſs *dafs dieſes aus der Scheel'ſchen Tungſtein-Säure beſtehe, war mir neu und unerwartet.*

Es iſt dieſes Metall äuſserſt ſchwerflüſſig, ungemein feuerfeſt, und verträgt ſich ſo gar mit einigen Salzflüſſen. Es iſt von einer weisgrauen Farbe, auf dem Bruche matt, ſehr dicht und feinkörnig, und ſolglich ausnehmend hart, denn es ſchneidet Glaſs, als das beſte Stahl; dabey iſt es nicht ſo ſpröde und leichtbrüchig als Guſs-Eiſen, ſondern hat eine ausnehmende Steifigkeit. Seine Federkraſt kann ich noch nicht beſtimmen, weil ichs bis jezt noch nicht in die gehörigen Formen habe verarbeiten laſſen können. Vermöge des beigemiſchten Eiſens roſtet ſeine Oberfläche in hieſiger feuchten Seeluft, aber minder als Eiſen und Stahl. Gewiſſen Glasflüſſen gab es einigemahl eine angenehme Zeiſiggrüne Farbe, die vom Kupfer- und Nickel-grün mercklich verſchieden iſt. Allem Schein nach wirds zur Hervorbringung nüzlicher gemiſchter Metalle ſehr brauchbar ſeyn.

Im Schmelzfeuer gab mir der leberfarbne Stein $746\frac{1}{3}$ ℔. *und der mulmigte Coffebraune und ſchwärzliche* —— 330 ℔. *dieſes Metalles, in einer Probe von* 2240 ℔. *oder einer Tonne.*

Um ſeinen Eiſengehalt und Natur genauer zu beſtimmen, zerlegte ich eben dieſe Steinarten auf dem naſsen Wege; und da gab mir der leberfarbne Stein folgende Producte nach der vom Herrn Scheele bekant gemachten Methode

Luftgeſäuerten Kalk —— —— ——	$746\frac{2}{3}$ ℔.
Eiſen —— —— —— ——	105 —
Sogenannte trokne Tungſteinſäure oder vielmehr einen weiſsen metalliſchen Kalk —— ——	$592\frac{2}{3}$ —

das übrige war unaufgelöſeter und unauflösbare Kieſelerde.

Dies

Dies geringe Verhältnis von Eisen machte mich auf die Tungsteinsäure so gleich aufmerksam; aus ihr muſste natürlicher Weise der gröſste Theil des im Schmelzfeuer erhaltnen Metalles bestehen; ich war also sogleich völlig berechtigt sie für eine Metalerde zu erklären, wie man ohnedem vermuhten konnte aus ihrem Verhalten zum äzzenden flüchtigen Alcali.

Völlig von Eisen getrennt, oder auf dem nassen Wege geschieden, habe ich sie aber bis jezt noch durch kein Feuer, Zusatz oder Methode, zu Metall reduziren können. Vielleicht ist man darin glücklicher in der Folge.

Sie hat übrigens die Eigenschaften welche Herr Scheele im Jahr 1787 entdeckte und beschrieb. So lang sie noch nicht durch äzzendes flüchtiges Alcali aufgenommen und durch Säuren daraus niedergeschlagen worden, macht sie mit Säuren eine herrliche gelbe *Farbe; diese wird* weis *in obengedachten Alcali, und* blau *durch eine Zinnauflösung in Salzsäure. Sobald sie aus dem flüchtigen Alcali einmahl weis niedergeschlagen ist durch Säuren, und gehörig ausgesüſst, abgedunstet und getrocknet, so vermag keine Säure die gelbe Farbe wiederum herzustellen, es sey denn daſs zufälliger oder unversehener Weise das brennbare sich ins Spiel mische; mit der Zinnauflösung in Salzsäure wird sie aber immer blau sie sey im gelben oder weiſsen Zustande, und das flüchtige Alcali färbt sie immer weis.*

So weit stimmen meine wiederholten und genauen Beobachtungen, so wie unter sich also auch mit den Scheelischen, überein. Wegen ihrer Auflöslichkeit aber in siedenden Wasser und ihrer eigenthümlichen Säure bin ich noch nicht einstimmig. Wollen wir uns von der eigenthümlichen Säure überzeugen, so müssen wir sie vorläufig von der ihr anhängenden fremden Säure völlig befreien.

Sie

Sie wird bekanntlich nach der Scheelischen Methode mit Säuren aus dem äzzenden flüchtigen Alcali niedergeschlagen: diese denn müssen entweder durch Aussüssung mit kaltem Wasser, oder durch Hitze und Verdünstung weggeschaft werden, vt domus Caesaris a suspicione vacua sit: *und hier tretten denn sogleich Schwierigkeiten ein, welche mir bis jezt beides Auflöslichkeit und eigenthümliche Säure zweifelhaft lassen.*

Wird sie aus dem äzzenden flüchtigen Alcali mit der geringstmöglichen Menge einer Säure niedergeschlagen, und das über dem weissen Niederschlage stehende Fluidum *sorgfältig davon abgenommen, so ist gedachter Niederschlag im siedenden Wasser zwar auflöslich aber nur auf eine anscheinende Weise; er geht nemlich mit dem Wasser durchs Scheidepapier, macht das Wasser milchicht so lang er darin diluirt und hängen bleibt, und fällt nach wenig Tagen von selbst als ein weisses Pulver gröstentheils wieder zu Boden. So gar mit kaltem Wasser geht er durchs Scheidepapier mit gleichem Erfolge. An Aussüssung desselben ist also auf dem Wege nicht zu denken, und die schwachen Spuhren einer Säure bleiben daher natürlicher Weise zweideutig und zweifelhaft.*

Wird hingegen diese Metallerde mit zu vieler Säure niedergeschlagen, und dem Alcali auch nur so viel zugesezt dass das Zuckerpapier zu röthen anfängt, oder aber wird sie heis abgedunstet und von der anhängenden Säure befreiet, so ist gar an keine weitere Auflösung zu denken, selbst die sich nur einigermassen mit vorbenannter höchst unvollkommen vergleichen liesse. Dass sie durchs Calciniren *ihre Auflöslichkeit im Wasser verliehre, hatte Herr Scheele selbst bemerkt, dass sie überhaupt auflöslich und eine eigenthümliche Säure sey, ist mir noch zweifelhaft. Wir können alle irren und zuverlässig irrt sich dieser grosse Scheidekünstler in der Angabe, dass Zinn durch die so genannte Tungsteinsäure blau nieder-*

niedergeschlagen werde: denn durch wiederhohlte übereinstimmende und entscheidende Versuche bin ich völlig überzeugt, dass hier fallacia optica *eingetreten, dass das Zinn nicht niedergeschlagen werde, und dass im gegentheil der weisse oder gelbe Metallkalk oder Tungsteinsäure durch die Zinnauflösung blau gefärbt werde.*

Was Bergmann darüber gesagt haben mag, ist mir noch unbekannt, da mir der dritte Theil seiner Werke noch nicht zu Gesicht gekommen. Auch weiss ich nicht ob sich Don Luyarte *bis zur Tungsteinsäure verstiegen habe in seiner Abhandlung vom neuen Halbmetalle des Wolframs, die bisher ihren Weg noch nicht zu mir gefunden hat. So bald ich von lezterer hörte, machte ich mich an den Wolfram — und siehe da war es dasselbige Metall, das ich dem Tungstein abgezwungen hatte — nur mehr mit Eisen gemischt, als ich auf dem nassen Wege fand. Wolfram und Tungstein sind daher Varieteten eines Geschlechts; Erze eines Halbmetalles einer Art. Ob dieses seinen Rang besser behaupten werde als der* Siderite? *muss ich fürs erste dahin gestellt seyn lassen, biss ich meine Versuche mit dem Zinn geendigt habe. Hiemit beschäftige ich mich in diesem Zinnlande von Rechts wegen, um so mehr da dieses Metall dem Scheidekünstler manchen Possen spielt, und nach seiner Natur und seinen Eigenschaften bey weitem nicht so bekannt ist, als es seyn sollte.*

Eine sonderbahre natürliche Mischung von Schwefel, Zink, Zinn, und Kupfer, als Fahlerz zusammen vererzt, und mit Arsenic innigst verbunden, fiel mir erst vor ein paar Tage in die Hände.

Avis au Public concernant un vocabulaire polyglotte par M. le Conseiller de Collèges Pallas.

Communiqué à l'Académie le 30 Mai.

Les recherches ingénieuses & profondes de plusieurs savans de notre siecle sur l'affinité & l'origine des langues de nations souvent très-éloignées entr'elles, & les éclaircissemens de l'histoire ancienne des hommes que plusieurs Historiens estimables ont sû tirer de ces recherches, donnent aujourd'hui un nouvel attrait, une direction plus décidée & un but plus philosophique à une étude, laquelle jusqu'ici paroissoit seche, ingrate & même stérile & frivole à des esprits superficiels. En parcourant les ouvrages d'un Court de Gebelin, on reste souvent étonné des inductions lumineuses que l'auteur a sû tirer de ce fond, & l'on ne peut s'empecher de régretter que cet homme laborieux n'ait pu soumettre à sa méthode toutes les langues de la terre. D'après l'analyse & la comparaison heureuse de celles qu'il avoit été à même de recueillir, personne ne doutera que la connoissance de celles que l'intérieur de l'Asie pouvoit lui fournir, ne l'auroit conduit à des découvertes encore bien plus interéssantes.

L'Empire de Russie qui s'étend sur une grande partie de cette Asie, partie presq'inconnue aux savans dans les temps antérieurs à Pierre le Grand, contient sans doute plus de nations & de peuplades, de langues & de dialectes qu'aucun Royaume de la terre. L'éspace très resserré du Caucase, habité par

par des peuplades peu nombreuſes & très-voiſines entr'elles, recèle plus de vingt & deux dialectes de huit ou neuf langues différentes. La Sibérie, plus vaſte, en offre un plus grand nombre encore, & la ſeule presqu'isle du Kamtchatka dont la population, lors de ſa découverte par les Ruſſes, ne ſembloit que commencée, contenoit neuf dialectes différens, de trois langues héterogènes. La plûpart de ces langues ſont bien plus caracteriſées, ont bien moins de rapport entr'elles & à toutes celles de l'Europe, que celles-ci n'en ont conſervé avec l'ancien celtique. Quel vaſte champ de découvertes & quelle inſtruction pour l'hiſtoire, un littérateur judicieux ne pourra-t-il pas trouver dans une collection de cette grande varieté de langues de peuples, dont l'origine & les migrations nous ſont, pour la plûpart, abſolument inconnues, & dont les différentes tribus ſe trouvent ſouvent éloignées l'une de l'autre à des diſtances immenſes, quelquefois en ſi petit nombre, que la langue court risque de s'eteindre avec ces peuplades.

Cependant la plûpart de ces langues eſt reſtée jusqu'ici un thréſor caché pour les ſavans : on n'a pas même tenté de rapprocher, ſur un plan uniforme, quelque nombre conſidérable de mots des langues déja connues. Les eſſais de quelques-uns, de donner l'oraiſon dominicale ou quelqu'autre ſuite de phraſes en différentes langues, ſont très-imparfaits, inſuffiſans, & n'ont rendu tout au plus qu'une centaine de langues & de dialectes, c'eſt à dire le tiers à peu près de celles qui exiſtent. Pluſieurs Littérateurs & Hiſtoriographes ont comparé un petit nombre de langues anciennes ou modernes, iſſues d'une ſouche commune. L'on trouve auſſi, outre la reſſource des Dictionnaires, quelques vocabulaires iſolés & épars, ſouvent peu nombreux & rarement correſpondans, dans les voyageurs modernes. Mais perſonne jusqu'ici n'avoit embraſſé l'enſemble des langues, que la dispersion & les divisions de l'espèce humaine, & l'influence des révolutions & des causes morales, physiques & politiques, pendant une longue suite de siecles & de générations, ont pû produire dans les terres habitables de tant de climats.

Cette vaste entreprise qui pourra enfin conduire à resoudre le problème de l'existence d'une langue primitive, étoit reservée à notre siecle. CATHERINE II. a daigné se faire un délassement de cette partie encore inculte de la littérature. Pour servir de base à un glossaire universel & comparatif de toutes les langues, Sa Majesté Impériale a fait Elle-même un choix de mots les plus essentiels & les plus généralement en usage chez les peuples les moins cultivés. Son Empire seul pouvoit fournir pour ce glossaire, presque le tiers de toutes les langues usitées sur le globe, & surtout un nombre considérable de ces langues encore ignorées des savans.

Dans ce choix on a donné la préférence aux substantifs & adjectifs de premiere nécessité & communs aux langues les plus barbares, ou qui servent à tracer les progrès de l'agriculture ou de quelques arts & connoissances élémentaires d'un peuple à l'autre. Les pronoms, les adverbes & quelques verbes, avec les mots numériques, dont la grande utilité pour la comparaison des langues est assez reconnue, y ont été admis, pour rendre ce glossaire plus complet & plus instructif.

D'après cet excellent modèle l'on a recueilli d'abord toutes les langues & dialectes du vaste Empire de Russie; ensuite un nombre plus considérable encore de langues étrangeres; de sorte que ce recueil surpasse déja, quoique continué seule-

ſeulement depuis l'année, tout ce qui a été tenté dans ce genre, & s'accroit encore continuellement par des matériaux de toute eſpéce.

L'intention de Sa Majeſté Impériale eſt, que ce recueil ſoit imprimé pour l'utilité du Public. Il ſera arrangé de façon que chaque mot aura à ſa ſuite ſes traductions dans toutes les langues qu'il a été poſſible d'obtenir. Par ce moyen, & par une claſſification de ces traductions ſelon leurs rapports, l'affinité des langues deviendra plus apparente & leur comparaiſon plus facile. La vraie prononciation de mots ſera exprimée avec la plus ſcrupuleuſe exactitude par une orthographe uniforme & déterminée. Un tableau général des langues, tant ſelon leurs rapports, que ſelon leurs patries, pourra ſervir d'introduction à ce travail, dont les ſavans, particulierement ceux qui peuvent en tirer parti, ne méconnoitront pas la grandeur & la difficulté & ſauront en apprécier le mérite.

Sa Majeſté Impériale, ayant bien voulu me nommer pour ſoigner la partie typographique de cet ouvrage jusqu'à préſent unique, je ne ſaurois aſſez-tôt en avertir le Public, dont l'impatience égalera mon empreſſement à remplir les ordres diſtingués de ma Souveraine.

Rapport
de M. le Profeſſeur Krafft, ſur deux ouvrages envoyés à l'Académie par M. Giovanni Vivenzio, Chevalier de l'Ordre de St. Conſtantin & premier Médecin de S. M. le Roi de deux Siciles.

Lu à l'Académie le 6 Juin.

Theoria e Prattica dell' Elettricità medica del S. Tib. Cavallo, & della forza dell' Elettricita &c. del S. Birch: tradotte Di Giov. Vivenzio.

Ce qu'il y a dans cet ouvrage de la propre compoſition du Chevalier Vivenzio, ce ſont l'introduction ſous le titre *Hiſtoire de l'Electricité médicinale*, & des remarques ajoutées au texte.

L'hiſtoire ſe rapporte à l'ouvrage de M. Cavallo & renferme deux parties.

1.) M. Cavallo ayant donné à la 3^eme^ partie de ſon traité, un expoſé des méthodes particulieres d'adminiſtrer l'électricité en différentes maladies avec une relation de dix guériſons authentiques effectuées par l'électricité: M. Vivenzio, pour ſuppléer à ce petit nombre de guériſons authentiques, a raſſemblé un grand nombre de cures électriques, faites en différens pays de l'Europe, dont on a fait mention dans les mémoires des Académies, ou dans d'autres livres de phyſique & de médecine. Il fixe la premiere époque de cette application intéreſſante de l'électricité à l'année 1747; en partant des

des prétendûes découvertes du D. Pivati, & après avoir exposé les méthodes de plusieurs savans électriciens; il rapporte aussi quelques unes de ses propres cures électriques.

2.) M. Cavallo ayant donné dans son traité une déscription des appareils de l'électricité médecinale; & ayant écrit à Londres, où les médecins sont le plus à portée d'en connoitre & d'en avoir les meilleurs: M. Vivenzio trouve cette déscription trop raccourcie; il donne plus de détails de la machine électrique de M. Nairne, & d'une autre à plateau de verre, qui est plus portative que celle là, & finit par des instructions utiles & nécessaires pour l'usage des machines électriques, soit en général, soit dans l'électricité médicinale en particulier.

Les remarques ajoutées au texte, contiennent pour la plûpart ou des circonstances historiques ou des éclaircissemens sur quelques endroits du traité de M. Cavallo & de celui de M. Birch.

On voit au reste que M. Vivenzio doit certainement être au fait, de tout ce qui concerne la pratique médicinale de l'électricité.

Istoria e Teoria de tremuoti in generale, ed in particolare di quelli della Calabria e di Messina de 1783. *Di Giov. Vivenzio.*

Cet ouvrage est composé de deux parties, dont la premiere est proprement scientifique.

Après un exposé historique des plus anciens tremblemens de terre, dont la mémoire nous ait été transmise, & de ceux du 17eme & 18eme siecle, (par le grand nombre desquels l'auteur veut prouver, qu'ils sont devenus plus fréquens que jamais,) il explique le rapport qu'il y a, entre les tremblemens de terre & les volcans, & passe à la recherche des moyens de mettre des contrées entieres à l'abri de leurs funestes effets, ou même de les prévenir entièrement: Il croit avoir imaginé un tél moyen, tiré des mêmes principes, qu'il a établis dans un mémoire sur la foudre ascendante, très bien accueilli du monde savant.

Il met pour principe, que le tremblement de terre est un effet de l'électricité terrestre, qui accumulée dans l'interieur de la terre au delà de sa quantité naturelle, se decharge pour se mettre en équilibre avec l'électricité de l'atmosphère, & qui pendant cette explosion fait trembler les parties de la terre où elle a lieu, & occasionne selon les circonstances, les éruptions des volcans.

C'est sur ce principe donc, que l'auteur fonde la construction d'un instrument, qu'il appelle *Para-tremuoto* & *Para vulcano*, qui a une analogie parfaite avec les conducteurs électriques, tels qu'ils devroient être dans la supposition de la foudre ascendante.

L'auteur tache à mettre hors de doute l'origine électrique des tremblemens de terre, par des preuves tirées de la théorie électrique, & par une expérience qui fait voir, que moyennant l'explosion électrique on peut secouer des corps legers.

Comme l'utilité des Para - tremuotos & des Para - vulcanos s'appuie principalement ſur celle des conducteurs électriques : l'auteur prouve très amplement les avantages de ces derniers, ſurtout s'ils ſont pointûs.

Il a auſſi imaginé un appareil, qui prouve l'effet de ſes Para - tremuotos & Para - vulcanos en petit, de la même maniere comme on fait voir celui des conducteurs électriques dans les cours de phyſique.

À la fin il allegue encore en faveur de ces inſtrumens l'opinion des anciens, qui prétendoient que des câvités creuſées à quelque profondeur dans la terre étoient un moyen éfficace, de prévenir les tremblemens de terre ou d'en affoiblir au moins les éffets.

La ſeconde partie de cet ouvrage quoique purement hiſtorique, contenant les rélations authentiques & originales des tremblemens de terre de l'année 1783, eſt toutefois très intéreſſante & pour l'hiſtoire même & pour la géographie phyſique.

Quoique enfin cet ouvrage ne préſente pas des découvertes nouvelles, & que l'origine électrique des tremblemens de terre n'eſt nullement encore conſtatée : cependant la maniere, dont l'auteur a traité cet objet, fait voir ſans doute, qu'il a beaucoup de lumieres & des connoiſſances littéraires fort étendues.

Réflexions
ſur le Territoire Taurique & ſes environs.

par

M. l'Adjoint Zouyef. (*)

Lu à l'Académie le 24 Octobre.

Pour profiter des ſervices que notre Correſpondant en Tauride, M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', offre a l'Académie, elle n'a qu'à lui recommander en général de continuer ſes recherches avec la même aſſiduité, avec laquelle il a ſervi jusq'à préſent l'Académie à ſon plus grand contentement.

La contrée qu'il habite, eſt vraiment digne d'être étudiée par un phyſicien & principalement par quelqu'un qui voudroit pénétrer dans l'hiſtoire du monde jusqu'à une quarantaine de ſiecles en arriere. Le bord montagneux de la prèsqu'isle Taurique, qui correſpond aux montagnes calcaires de la Moldavie d'un coté & de l'autre à ceux qui accompagnent par l'Abaſie & la Tſchercaiſſie la chaine primitive du Caucaſe jusqu'à la mer Caspienne, (dont la conſtitution phyſique paroit être la même que celle de la mer noire, de même que leur ſituation ſous la même latitude & peut être auſſi leur âge:) ce bord montagneux, dis-je, n'eſt ſelon toute vraiſemblance, qu'un reſte des montagnes ſecondaires de cette chaine aſiatique, qui conſtituoient au-

(*) Ces réflexions ont ſervi en même temps d'inſtruction pour M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', qui s'eſt établi depuis peu dans la Tauride.

auparavant les bords de l'ocean & qui se sont écroulés pour former le fond de la mer noire, dont la profondeur augmente à mésure qu'elle s'avance vers le midi; aussi les bords méridionaux sont-ils tous escarpés & presque tous, du moins ceux de la mer noire, brulés. Comme ce bouleversement qui doit avoir agi sur une bien plus grande étendue de l'Asie occidentale & d'une maniere plus violente, que l'on ne peut gueres s'imaginer à présent, consiste dans un soulévement des eaux & ensuite dans un réculement de cette côte de l'ocean, produit par un tremblement extraordinaire & par un ou plusieurs volcans, par lesquels la nature en séparant l'Europe & l'Afrique de l'Asie, a voulu faire paroître les plaines de Russie & de Lithuanie; il ne semble pas être d'une même origine, que celle que M. Hablitzl' croiroit peut-être devoir donner à différens endroits des montagnes Tauriques, où il trouve de grands dérangemens, des laves, des pouzzolanes & en général tout ce qui est étranger au pays tartare; mais plustôt en faudroit-on mêttre le foyer de l'embrasement & assigner la place nâtive de ces productions ignées d'où elles doivent avoir été apportées, dans la mer de Marmora, qui est le centre & la vraie source des révolutions de l'Asie mineure & peut-être la cause de la perte du monde primitif, dont nous cherchons en vain les traces de son existence passée.

Pour vérifier cette esquisse de conjecture il ne s'agit qu'à rassembler beaucoup de notices physiques & morales dans la contrée même qui fait aujourd'hui la haute Arménie, & que M. Hablitzl' sera sans doute à portée de tirer des différentes nations, des marchands arméniens & des juifs, qui traversent quelque fois toute la Perse jusqu'au Tibet; il peut aussi facilement correspondre pour le même but avec les consuls de la Russie résidens à Amasie, à Erzerum, à Trebesonde &c. D'un autre coté il ne feroit pas mal à propos, de fouiller à loifir le terrein en différens endroits de la Presqu'isle; mais je fuis presque fur qu'à une certaine profondeur, on ne trouvera aucune trace d'une terre habitée, ou d'autres veftiges d'une organifation détruite.

Ce n'eft que très long temps après ce bouleverfement, que les habitans du haut orient & du voifinage du Caucafe fe hazardoient de defcendre dans ces plaines pour cultiver le fond defféché de la mer, & parmi lesquels s'eft confervé la mémoire de cet accident, propagée enfuite par les générations éteintes dans un peuple étranger, tel que les Tartares, qui difent pofitivement, que le plat païs de la Crimée avec fes environs ont été fous l'eau, & n'en font fortis que par une ordonnance d'un Empereur de Conftantinople, en vertu de laquelle on avoit fait creufer le détroit pour faire écouler les eaux dans la Méditerranée.

La Bouche ou les Oreilles, comme les Tartares appellent la caverne, qui fe trouve dans la montagne près d'Esky-krim, ne feroit-elle pas un refte de cette terrible révolution, dont la mémoire a été répandue par les peuples de l'Orient, & s'eft transmife enfuite d'une génération à l'autre, enforte que l'impreffion s'en eft confervée jusqu'apréfent chez les Tartares, qui difent, qu'on pourroit aller fous terre de la Crimée jusqu'aux Indes; narration que les Ruffes appliquent aux catacombes de Kiew pour aller jusqu'à Jerufalem, & à quelques autres grandes cavernes, qui font fur les frontieres de l'Afie. Tout cela donne à juger que l'étendue de ce bouleverfement terrible furpaffe de beaucoup notre imagination, & que nous ne pouvons nous en faire une idée, qu'en ramaffant fous un feul tableau les veftiges qu'on en trouve dans l'Afie mineure.

Je

Je le repete, & c'eſt une ſuite de mes propres obſervations, que l'Océan ſeptentrional d'aujourdhui s'étendoit autrefois jusqu'à la mer noire & la caſpienne; que les montagnes du caucaſe, ont été les côtes de cet ocean, & que la Ruſſie Européenne telle qu'on la voit actuellement, ainſi que la Lithuanie & une certaine partie de l'Europe, en ont été le fond; que le tremblement de terre s'étendant du golfe perſique jusqu'au Gibraltar, en rompant les chaines continues de l'Europe, de l'Afrique & de l'Aſie, avoit partagé les trois parties du monde. La correſpondance des terrains, les couches, le penchant des montagnes, les volcans éteints, les matieres ignées diſperſées, les pétrifications de la haute mer diſperſees par toute la Ruſſie, & pluſieurs autres veſtiges en permettent la conjecture, & donneront à l'avenir une ample matiere à diſcuter.

M. le Conſeiller de Cour Hablitzl' pourra encore rendre un grand ſervice à l'Académie en lui communiquant les notices hiſtoriques, géographiques, numismatiques & d'autres, qui doivent ſe trouver en aſſez grande quantité aux environs de la mer noire.

Quant à une hiſtoire naturelle du regne animal, ce ne ſont que les débris du monde paſſé, qui pourront lui fournir quelques decouvertes: il trouvera au reſte dans la mer noire, pluſieurs animaux que nous n'avons pas encore dans notre cabinet académique, particulierement du genre des Molluſces & peut être des Zoophytes.

Pour le regne végétal, qui eſt l'étude favorite de notre ſavant correſpondant, le catalogue que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Academie, lui pourra être d'un grand ſecours pour nous

nous envoyer les plantes du Levant, dont nous desirerions faire l'acquisition pour le jardin académique.

Enfin pour le regne minéral, notre Physicien ne manquera pas de nous envoyer tout ce qu'il trouvera d'interéssant dans le genre des fossiles; mais il sera surtout prié de s'informer exactement du lieu & de l'usage de cette argile que les Tartares appellent *Kefekil*: elle doit être bien differente de celle dont on fabrique les пеньковыя трубки, avec laquelle Wallerius, Cronstedt, Born, & d'autres la confondent, & qui se trouve en Natolie à quatre journées de Broussa; la nature de celle-ci est tout à fait inconue. On dit aussi qu'il se trouve près de Baluklava le Наждакъ, ou l'émeril dont les Tartares font un grand commerce à Constantinople.

M. le Conseiller de Cour pourra au reste nous dire si dans la Tauride le quartz feuilleté se trouve en grande quantité, s'il y fait une veine dans la montagne, ou s'il s'y trouve isolé dans les champs, ou enfin entremélé avec d'autres matieres, comme par exemple dans de l'argile pétrifiée. On peut appliquer la même question aux différentes laves qui, comme il paroit, ne se trouvent pas en grande quantité, ce qui feroit voir qu'elles sont natives de la Crimée, & non pas apportées d'ailleurs.

Extrait

Extrait
des lettres de Mrs. Järig & Hablitzl, lues à l'Académie, le 1er Décembre,
par M. le Conseiller de Collèges Pallas.

I. M. Järig, dans une lettre, datée sur le lac Goussinoy près de Seleghinsk du 15 Août, & adressée à M. Pallas, donne avis d'un voyage qu'il a fait vers la haute montagne que les Mongols appellent *Khan khatkhour*, ou Khatkhour la Royale, & qui est la plus haute entre le Selengha & le Djida, sur cette partie de nos frontières vers la Mongolie chinoise. Il y avoit recueilli plusieurs plantes dont il fait mention, entre autres, le *Barberis altaïca*, le *Saxifraga bronchialis*, l'*Asclepias purpurea*, le *Hypecoum erectum*, & une nouvelle espéce de *Lapsana* à feuilles pinnifides, dont M. Pallas se reserve de donner la déscription à l'Académie, lorsqu'il en aura observé la fleur l'été prochain, après avoir cultivé quelques graines qu'il en a reçues.

Par une autre lettre du 1er Septembre, qui étoit accompagnée de plus de quarante espéces de graines recueillies pendant le même voyage, M. Järig rapporte les éffets dangereux, qu'un de ses éléves a ressentis après avoir maché une très petite branche de la racine du *Stellera Chamaeiasme*, que les Tangouts appellent *Rudzik* & que les Russes, à cause de la même ressemblance avec l'homme que cette racine possede de même que la Mandragore, ont nommée Moujik-koren (Мужикъ корень) ou racine-homme. Il en eut une violente inflammation du

 gosier

gosier, qui menaça de l'étouffer, des vertiges, des nausées & un tremblement général: enfin après avoir avalé beaucoup de lait, survint un vomissement violent, lequel avec des tranchées & un cours de ventre le rétablirent au bout de 12 heures.

Le même M. Järig joint, à une autre lettre de même date, la continuation de son histoire des Mongols entreprise à la requisition de M. le Gouverneur d'Irkoutsk Jacobi. Cette dernier lettre est au reste accompagnée de quelques fragmens d'un dictionaire mongol & tangoute, traduits en allemand, & ne contient d'ailleurs rien de remarquable.

II. Par une Lettre datée d'Astrachan le 1 Juin 1781. M. Hablizl' Correspondent de l'Académie marque, qu'il a appris par un Russe longtemps esclave en Boucharie, que les pâturages artificiels de ce pays, dont la plante a été indiquée par des voyageurs sous le nom de *Beddé*, n'est autre chose que la Luzerne (*Médicago sativa*) qui croit aussi sur les landes au nord de la mer Caspienne. Elle est aussi spontanée en Boucharie; mais pour en avoir une provision suffisante & pour subvenir au defaut des prairies naturelles, on la seme en assez grande quantité, pour pouvoir conjointement avec la paille de quelques espéces de Sorgho (*Holcus varius*, *Sorghum*, *Saccharatus*), en nourrir le bétail & surtout les chevaux pendant tout l'hyver. On ne choisit pas les terreins pour la culture de cette plante, mais on est obligé de subvenir aux prairies factices par un arrosement artificiel. La semaille se fait au printemps; après que le terrein arrosé a été labouré & hersé, on y répand les graines sans les couvrir de terre. On fauche la premiere année une seule fois, la seconde deux fois; & dans la suite on peut faire jusqu'à cinq ou six recoltes dans une

une ſaiſon. Après chaque recolte on donne un arroſement, & la prairie, ſans autre culture que d'y répandre de deux années l'une un peu de fumier ſec qu'on recouvre d'une couche legére de ſable, reſte en bon état pendant 25 à 30 années. L'herbe ſe donne pendant l'été toute verte au bétail; on en ſeche une quantité pour l'hyver, & on la méle par ménage avec la paille de ris, de froment & du ſorgho. Lorsqu'on fait enfin labourer ces prairies, pour leur donner une nouvelle culture, les racines de la luzerne ſont encore une fort bonne nourriture pour les bêtes à corne. La culture de la luzerne ſeroit par conſéquent très-utile pour les landes des provinces méridionales de l'empire; parceque cette plante vient même ſur des terreins ſaumâtres & ſabloneux, pourvû qu'elle y trouve l'humidité.

Les voyageurs ont parlé d'une autre plante à pâturage que les Bouchares appellent *Touchàn*. Ce n'eſt que l'eſpéce d'Abſinthe, décrite dans l'ouvrage botanique du célébre Jacquin ſous le nom de *Artemiſia auſtriaca*. Mais cette plante n'a pas beſoin de culture, elle vient naturellement ſur les terreins les plus acides, & ſert de nourriture aux brebis, ſurtout pendant l'hyver, puisqu'elle continue de végéter ſous la neige.

III. Sa Majeſté Impériale ayant fait équiper une petite escadre ſur la mer Caſpienne, pour chercher des établiſſemens plus avantageux & moins mal-ſains pour le commerce, M. Hablizl' fut nommé en 1781 Secrétaire de cette escadre, dont le commandement étoit confié à M. le comte Voynovich, Dalmatien, Capitaine de haut bord. Ce fut dans cette expédition que M. Hablitzl' par une lettre datée d'Aſtrabat en Perſe du 7 Juillet 1782. a communiqué à M. Pallas quelques obſervations faites ſur la côte de la Perſe, ſurtout à Aſtrabat où l'eſcadre avoit hyverné.

Parmi le bêtes domeſtiques du Maſanderan les vaches & les brebis ſont les plus remarquables. Parmi les bêtes à corne on trouve une belle race, dont le dos s'éléve au défaut du col en boſſe ou plutôt en crête, d'un pied & même d'un pied & demi de haut. Cette boſſe eſt garnie de long poils mols & hériſſés, qui continuent le long du col en maniere de criniére. Ce ſont les taureaux qui ſe diſtinguent ſurtout par la hauteur de cette boſſe, les vaches ne l'ont que très-petite & ſouvent à peine ſenſible. Au reſte cette race ne ſe diſtingue du bétail ordinaire que par une encolure plus forte & plus racourcie, le train plus bas, une taille médiocre, & une touffe de poils crêpus ſur le front. Elle ſe trouve dans tout le Maſanderan & aux environs d'Aſtrabat; mais elle ne s'eſt pas encore repandue dans le Ghilan. Les Perſans ignorent d'où cette raçe leur eſt venue; mais en Boucharie & à Khiva, où on l'éléve auſſi, elle eſt connue ſous le nom de vache arabe. Les taureaux de cette race ſe mélent volontiers aux vaches ordinaires, & le produit devient ſemblable au pêre. Dans le diſtrict de Talichan qui borde ſur le Ghilan, on en trouve auſſi à double boſſe, & la race y eſt très abondante. On dit que la ſeconde boſſe de cette variété s'éléve ſur la partie poſtérieure du dos vers la croupe.

On a transporté par ordre de S. A. Msgr. le Prince Potemkin, pluſieurs individus de cette race à St. Pétersbourg, qui ſemblent réuſſir très-bien dans le Parc de Sarskoe-Sélo.

Les

Les brebis ſe trouvent à Aſtrabat de trois races. La premiere eſt la race Calmoucque, qui a une groſſe maſſe de graiſſe ſur la croupe au lieu de queue. La ſeconde, qui eſt la plus commune dans toutes les provinces ſeptentrionales de la Perſe, reſſemble à celle là, mais ſe diſtingue par la petiteſſe de la maſſe de graiſſe & par une petite appendice ou queue attachée à cette maſſe. On la trouve auſſi dans le Caucaſe, d'où les Tſcherkiſſes en envoient des troupeaux au marché d'Aſtrachan. La troiſieme race enfin, celle de Boucharie, qui a une queue applatie, presque triangulaire, à peu près comme la chêvre, & dont la laine eſt crepue & touffue comme celle de la tête d'un négre.

Les Buffles ſont ſi communs dans le Maſanderan, que des troupeaux entiers errent partout ſur les marais, & les bords des anſes de la mer. Comme ils ſont naturellement féroces & vivent en toute liberté, le Capitaine Woodrooſe, cité par Hanway, a pû fort bien prendre ces troupeaux pour des Buffles ſauvages.

On n'a pas de Chameaux dans le Maſanderan, peut-être parceque le buis leur eſt nuiſible, ou parcequ'il faut des landes arides & ſalées pour la réuſſite de ces bêtes.

En voguant ſur la mer Caſpienne M. Hablizl' remarqua au mois de May, qu'un cable rétiré de la mer pendant la nuit, étoit tout parſemé d'étincelles brillantes. En recherchant la cauſe de ce phénomène il trouva, qu'il étoit du à un grand nombre de fauſſes Chevrettes (*Cancer Pulex* Lin.) qui ſe trouvoient attachéés à la vaſe & aux paquets de petites moules, que le cable avoit enlévées du fond, & dont le contenû avoit été mangé par ces chevrettes, & remplacé par celles qui ſe trouvoient chargées d'oeufs. — D'ailleurs on n'obſerve pas ordinairement dans la mer Caſpienne cette lueur phoſphorique, ſi commune dans l'Atlantique & dans l'Océan des Indes.

Mais M. Hablizl' a remarqué que les couſins, auſſi communs que les lampyrides aux environs de la baye d'Aſtrabat, y paroiſſent tous luiſans la nuit, en automne auſſi bien qu'au commencement de l'été; obſervation qui n'a pas encore été conſignée par aucun voyageur de l'Aſie méridionale.

SUPPLE-

SUPPLEMENT.

L'Académie publie ſous ce tître de Supplément les mémoires que les ſavans étrangers lui ont addreſſés, & qu'elle a jugé mériter ſon approbation. Elle avoit d'abord réſolu de les garder, jusqu'à ce qu'il y en eut aſſés pour en faire un volume, qu'elle auroit enſuite fait imprimer ſéparement: mais comme elle voit qu'un tel arrangement en retarderoit trop la publication, & qu'elle a même appris que divers auteurs impatientés de ne pas voir paroitre leurs mémoires, les avoient déja fait inſérer dans d'autres collections, elle a cru devoir changer de reſolution, en ajoutant à l'avenir à chaque volume de ſes Actes un Supplément, où ſe trouveront, autant que l'eſpace le permettra, les mémoires étrangers qui lui ont été envoyés pendant le cours des années précédentes. Elle en donne ici quatre des plus anciennes, & elle reſerve les autres pour les volumes ſuivans: de ſorte que Mrs. les Auteurs qui lui ont adreſſé jusqu'ici des mémoires, qu'elle a approuvés, peuvent être aſſurés de les voir paroître ſelon l'ancienneté de leurs envoys.

DE CONFERVIS PALVSTRIBVS OCVLO NVDO INVISIBILIBVS;

Auctore

O. F. MÜLLER.

Conuent. exhib. die 24 *Maii* 1779.

Dum Meinbergae et Pyrmonti thermis et fontibus medicatis fruendi gratia totum mensem Augustum et partem Septembris anni 1777. degerem, paruam spem fructus exinde contra arthritidem redundantis fouens, Confervis paluftribus et quidem microscopicis, vt commoratio in his locis aliqua tamen parte proficua esset, animum intendi. Res indagatione eo dignior videbatur, quo rariora sunt vegetabilia nudo oculo prorsus inconspicua; natura enim, quae larga manu animalcula vndique disseminauit, plantas microscopicas parcissime distribuit. Hinc Botanicorum omnes, quantum iam memini, ne vllum quidem regni inuisibilis ciuem suis classibus adscripserunt, vnicum si exceperim, quem *Ledermüller* inuenit, *Linneus*que sub falso genere *Byssi*, nomine *cancellati* adoptauit; Conferuis enim annumerari debere et structura tubulosa et granula intrinseca apprime probant. Corrigendus quoque character Confervae genericus, qui a Linneo dicitur: *tubercula inaequalia in fibris capillaribus longissimis*; horum enim attributorum vnicum tantum, *capillare* nempe Conferuis in genere proprium est. Dicerem potius: *fructificationes*, *seu granula intra filum capillare.*

 Soli-

Solitario *Ledermülleri* ſocios plures ex aquis paluſtribus Mejenbergenſibus et Pyrmontenſibus, pulchritudine, ſtructura abſcondita ac euolutione ſeminulorum perquam memorabiles adjicere iuuat.

Nouae hae Conferuae nudo oculo inuiſibiles, genere quidem conueniunt, tres vero familias et vndecim ſpecies conſtituere videntur; has nomine ſpecifico, illas terminatione nominis triuialis (ratio denominationis e deſcriptione patet) diſtinguere volui. Synonyma nulla apud auctores reperio. Species 4. 5. et 10. *Meienbergae*, reliquas *Pyrmonti*, 1. 3. 4 et 11. in paluſtribus *Haunienſibus* quoque inueni, quamlibetque vbique terrarum, haud tamen vulgarem reperiri poſſe, nullus dubito.

A proceſſu filamentorum lineari auta recto tramite deflexo, vegetabilia haec, vt facilius noſcantur *continua* et *diuergentia*, ab interſectione vero *articulata* et *non articulata* dixi.

Filamentis continuis inarticulatis:

1. Conferua *punctalis*, filamentis inarticulatis ſimplicibus, ſerie punctorum longitudinali.

Filamenta teretia absque ſegmentis pellucida, ſimplicia, Confernae *ſerpentinae* maiore varietate triplo anguſtiora; medium percurrunt globuli ſolitarii, pellucidi, in lineam longitudinalem diſtributi.

2. Conferua *porticalis*, filamentis inarticulatis ſimplicibus, lineis punctorum transuerſis arcuatis.

Filamenta teretia pellucida, lineis transuerſis curuatis inſcripta; maiori amplificatione lineae ex punctis conflatae conſpiciſpiciuntur; haec granula vireſcentia in lineas arcuatas digeſta ſunt, ac ſeriem porticorum ex totidem lapillis ſmaragdinis fingunt. Articulatam licet ex ſitu punctorum ſeminalium ſuſpicarer, nullas tamen interſectiones detegere potui.

3. Conferua *pectinalis* filamentis inarticulatis ſimplicibus, tranuerſim confertim ſtriatis.

Pulcherrimum vegetabile ſtructura omnium ſubtiliſſima, annulis confertis antennas cancrorum refert.

Filamenta hyalina teretia quidem ſunt, depreſſa tamen apparent, ſtriis circularibus, confertiſſimis et ſubtiliſſimis inſcriptae; mediam longitudinem luor flaueſcens, ſeu lineae binae corrugate percurrunt, aut ſi mauis, materia inter ſtrias flexuoſa, vel potius puluiſculus ſeminalis, medium inter duas ſtrias occupat; veſtigium enim ſeminuli aut granulorum aliud in hac ſpecie nullum reperi. Quot obuenere, maximam partem extremitates truncatas, paucae tamen alteram in filum attenuatam habuerunt.

Quaedam ſtriae reliquis remotiores paſſim interſectionem mentiuntur, foco tamen aliquantum mutato, merae ſtriae vbique videntur. Quaedam ſtriarum interſtitia vacua, quaedam puluiſculo flaueſcente in medio farta erant.

Aliud quoque exemplar reperi cuius medium inter duas quaslibet ſtrias globuli bini vel tres pellucidi transuerſim oblongiuſculi occupauerant; in paucis tamen vacuum, ſeu a globulis derelictum erat; hinc globuli hi, ſeu materies fluida, verum Conferuae ſeminium, filamentaque, non *Cancelli* aut *Cyclopis* antennarum exuuiae (qua quidem perquam ſimiles et denſe ſe annulatae et ſimul ſetis breuiſſimis obſita ſunt) ſed verum vegetabile.

Specimina quaedam caeteris triplo anguſtiora reperi; an omnia mera fruſta, anguſtioraque dehinc extremitati attenuatae debeantur?

Varietatem ſingularem et quidem volumine maioris ſpeciminis absque omni ſtriarum circularium veſtigio totam hyalinam, ſola materie flauida in medio inſtructam, aliam annulatam absque omni materiei vmbra reperi, haec an junior ſeminio nondum conſpicuo, an ſemina iam eiaculauerit? qua vero ratione ſtriae concentricae penitus euanuere, nondum concipio.

Frequens occurrit cum Conferua *ſerpentina minore* in ſcaturiginibus Germaniae et Daniae.

Filamentis continuis, articulatis.

4. Conferua *ſerpentina*, filamentis ſimplicibus articulatis, articulis elongatis aequalibus.

Filamenta ſimplicia, teretia, ante maturitatem in ſpiram aliquantum curuata: articuli longi, granulis farti virides, deſtituti hyalini. Puluisculus ſeu granula matura vndique ab interjectionibus medio articuli in aceruum colliguntur extremitatesque vacuas et hyalinas relinquunt; hoc quoque eiecto, articuli toti hyalini perſiſtunt. Variat diametro quadruplo minori, articulorumque maiori et minori longitudine, aequali tamen in quouis indiuiduo; figura quoque coaceruati puluiſculi potiſſimum ratione aetatis varia, minus vel magis contracta; hinc ſerpentiformis vel quadrangula.

In

In filamentis 24 — 28 ſegmenta numeraui; in integro exemplari extremitates obtuſae ſunt.

Omnium maxime vulgaris eſt.

5. Conferua *transuerſina*, filamentis articulatis ſimplicibus: articulis inaequalibus, faſcia duplici.

Filamentum teres articulatum viride, interſectionibus diuerſae longitudinis. Granula ante maturitatem totam plantam occupant ac viridem reddunt, matura vero in quolibet articulo in duos aceruos cumulantur, faſciasque binas virides formant, reliquumque articuli hyalinum praeſtant; denique granula faſciarum in aqua diſperguntur, totumque articulum vacuum et hyalinum relinquunt.

Varia granulorum in articulis maturitas pulcherrimam plantam ſeu bacillum varie faſciatum, articulis totis viridibus, vel faſcia duplici viridi vel prorſus hyalinum ſeu granulis deſtitutum exhibet.

6. Conferua *ſtellina*, filamentis articulatis ſimplicibus: articulis breuibus, aequalibus puncto radiato duplici.

Filamenta pellucida teretia articulata; articuli aequales breues, glomerulis pulueris viridis binis ſubradiantibus inſtructi; quidam, exploſo puluere, vacuos et hyalinos ſe ſiſtunt.

Ante collectionem granulorum hanc plantam haud vidi, vel potius minus noui; ſola enim diſtributione ſeminulorum pleraque huius generis diſtinguuntur. Singularis eſſet,

 niſi

nisi quaeuis harum Conferuarum suum singulare haberet, coacervatio granulorum cuiusuis articuli in duas maculas rotundas, radios breuissimos emittentes, quibus quasi serie stellarum viridium Conferua nulli secunda effingitur.

7. Conferua *decimina*, filamentis articulatis simplicibus: articulis quadruplici X. notatis.

Filamenta articulata in maturitate subdepressa, hyalina, lineolis obliquis vtraque pagina sese in figuram X, quater in quouis articulo secantibus, seu taeniolae binae bacillo tereti hyalino ita circumcinctae, vt sibi alternatim in quouis articulo quater incumbant, numerumque romanum XXXX, seu si mauis duplex M sibi inuerse impositum efficiant. Taeniarum seu lineolarum viridis color moleculis seminiferis virentibus debetur, hisque perditis, quasi vaginae effoetae hyalinae et aegre conspicuae superesse videntur.

8. Conferua *quinina* filamentis articulatis simplicibus: articulis aequalibus lineis in zic-zac obliquis.

Filamenta pellucida, hyalina, articulata; articuli aequales, crystallini, elongati; puluisculus viridis, non glomeratus est, sed globuli pulueris in lineas obliquas nouendecim, non quidem vti in praecedente sese secantes, sed octodecies numerum V. alternatim inuersum describentes, ducti sunt. Linea quaeuis in maiori amplificatione globulis tribus pellucidis, passim viridibus, passim deiecto seminio hyalinis, quorum duo extremi lineis collateralibus communes sunt, consistere videntur.

Oculo nudo congeries myriadum filamentorum in fossis palustribus massam gelatinosam laete viridem offert; pars in va-

vasculum recepta dispersa et dispalata quasi nebulam in aqua sistit; ope lentis manualis substantia filamentosa conspicitur, microscopio autem minima huius vegetabilis portio aceruum filorum crystallinorum suis intersectionibus et lineis in zic-zac ductis visu pulcherrimum exhibet. Duplicem varietatem articulis longis et articulis breuibus inueni; huius rursus indiuidua reperi, quorum articuli, 3. 4. 6. 7. et 9. lineis obliquis inscripti erant, illius vero quiuis articulus in omnibus speciminibus lineas 19. continebat; in varietatibus 4. et 7. linearum, lineas serie tripla, dupla et vnica globulorum compositas esse vidi, prouti nempe globuli maturiores secesserant; id quod etiam de varietate nouendecim linearum valere postera dies docebit.

Filamentis diuergentibus inarticulatis:

9. Conferua *vesicata*, filamentis inarticulatis, subramosis, medio et apice in vesicam productis.

Filamenta viridia, farta granulis pellucidis teretia, iisdem destituta depressa, dilata absque vlla intersectione passim in vesiculam sphaericam producta; haec raro terminalis est, absque processu noui filamenti; interdum ramulum breuem vel in angulum rectum vel in acutum emittunt. Granula matura apice filamenti et ramuli effunduntur, locaque vacua hyalina et pellucida relinquunt.

Hanc *Havniae* quoque in piscina *Rosenburgensi* semel reperi, totam viridem laxam et flexuosam granulis nondum maturis, granulorumque processu stringi et rigidam euadere autumo.

10. Conferua *burſata*, filamentis inarticulatis diuaricatis, veſicas laterales emittentibus.

Filamentum teres viride recta extenſum, dein geniculo aliquantum diuaricatum, mox vero in lineam rectam rurſus productum; ab altero latere pendent veſiculae indeterminato ſitu et figura (obſeruationes ſufficientes deſunt, vnicum enim exemplar tantum reperire contigit) itidem virides.

Inter Conferuas et Sertularias media.

11. Conferua *ſaccata*, filamentis inarticulatis in idem latus pluries diuaricatis, area globifera alternatim expletis.

Filamenta ſubdepreſſa, facile fragilia, in idem latus bis aut ter diuaricata, alternatim hyalina et quaſi ſacculo granuloſo globulis, oua vel ſemina referentibus, duplici vel triplici ſerie inſtructa; vtraque area hyalina aeque, ac globulis referta, longitudine, globulique granulis reliquarum Conferuarum multoties maiores, numero et ſerie variant.

Haec et praecedens, rariſſimae ſunt.

Pulchritudinem et elegantiam minutorum horum vegetabilium quis non videt? mundi muliebris noua exempla, delicata et venuſta praebere poterint, ſtructuram vero interiorem oculo maxime armato inuiſam, nec niſi ex granulorum ſeu ſeminulorum multifario et tamen conſtante ordine coniiciendam, ſingularem Naturae oeconomiam in eorundem diſpoſitione quis non miretur!

Tubulus eſt, ſeu filum canaliculatum, prima aetate totum viride, ſubopacum; viriditatem et opacitatem conciliant granu-

granula totum tubulum vndique occupantia; haec prouecta aetate loca natiua, quae eorum difceffu pellucida euadunt, deferunt, in Conferuis *diuergentibus* in tubulos varie difperguntur et coaceruantur, ac demum exitum in extremitate tubuli quaerentia, puluisculi viridis inftar apice ramulorum effunduntur; in *continuis* vero incertam et determinatam figuram pro diuerfa fpecie diuerfam, in quouis vero eiusdem fpeciei articulo eandem, aemulantur, partemque tubuli vacuam pellucidiffimam relinquunt, matura dein paffim euanefcunt; in quibusdam fimul in globulos pellucidos refoluuntur (hi forte membranulae, quibus fecedens puluisculus adhaeferat) ac denique totus tubulus vacuus et omnino hyalinus confpicitur.

Figura coaceruatorum granulorum pro diuerfa fpecie in Conferuis *continuis* globularis, quadrata, flexuofa, ftellata, cruciformis, acutangula vel hamata videtur; qua vero lege et quo apparatu omnia haec in re inuifibili concinnantur, prorfus latet, eo vsque oculum humanum ne armatum quidem penetrare fas eft, fatis contentum fenfu benigniffimae et infinitae maieftatis diuinae ad eos initi limites, vnde depofitis exuuiis noua virtute aeternum progredi fpes eft et gloria.

Tabula I. omnia aucta magnitudine exhibentur, oculo enim nudo inconfpicua funt.

Fig. 1. Conferua *punctalis*.
—— 2. Conferua *porticalis*.
—— 3. Eadem valde ampliata.
—— 4. Conferua *pectinalis*, valde aucta, cum luore feminali totam percurrente.
—— 5. Eadem interfectionibus quibusdam puluere feminali vacuis.

Fig. 6. Eadem tota vacua.
—— 7. Eadem acuminata.
—— 8. Conferua *ſerpentina*, iunior virore farcta.
—— 9. Eadem maturior, magis ampliata, puluisculo in acervos vndulatos longitudinales collecto.
—— 10. Eadem, puluisculo in aceruum quadrangularem conflato.
—— 11. Eadem priori varietate ſubtilior.
—— 12. Conferua *transuerſina* articulis repletis, bifaſciatis vel vacuis.

Tab. II.

Fig. 1. Conferua *ſtellina*.
—— 2. Conferua *decimina*.
—— 3. Eadem valde aucta.
—— 4. Conferua *quinina*.
—— 5. Eadem valde ampliata.
—— 6. et 7. Conferua *veſicata*, Havnienſis.
—— 8. et 9. Eadem Pirmontenſis.
—— 10. Conferua *burſata*.
—— 11. Conferua *ſaccata*.

SUR

SUR LES PYRAMIDES ISOPÉRIMÈTRES.

Par
M. *SIMON LHUILIER*,
Citoïen de Genève.

Communiqué à l'Académie le 24 Janvier. 1782.

§. 1.

La Théorie des figures planes Iſopérimètres, entant qu'elle appartient à la Géométrie élémentaire, a déja été traitée par les Anciens: leurs travaux à cet égard nous ont été transmis par Pappus dans le V^me^ livre de ſes Collections Mathématiques. Il eſt vrai que cette matière pourroit être traitée d'un manière plus lumineuſe & plus méthodique, & qu'on peut même reprocher à cet Auteur, ſur ce ſujet en particulier, un défaut d'exactitude, dans une des ſes propoſitions fondamentales: mais ce défaut eſt aiſé à ſuppléer; & on peut regarder ce point de la Géométrie comme ſuffiſamment développé, même par les élémens. D'ailleurs quelques Auteurs modernes ont traité la même matière, en ſuivant une méthode toute différente. Voyez p. ex. la Géométrie de T. Simpſon & les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1752. Mr. Moula, dans les Mémoires de l'Académie Impériale pour 1737 a appliqué le Calcul différentiel à ce ſujet élémentaire: ſa diſſertation, quoique très-ingénieuſe, ne peut cependant pas être regardée

 comme

comme un traité complet, puisque cet Auteur ne parle pas de la variation de la surface d'une figure de contour donné, provenante de la variation du nombre de ses côtés. M. Tommasini Professeur de Mathématiques à Pise, a publié en 1774 un ouvrage élémentaire, sous le titre. *De maximis & minimis ad institutiones geometricas accommodatis*; les deux premiers livres de cet ouvrage renferment, outre le traité élémentaire le plus complet que je connoisse sur les figures planes Isopérimètres, un très grand nombre de propositions détachées relatives à la même matière.

Le 3me & le 4me livre de ce dernier ouvrage sont destinés aux solides Isopérimètres qui sont l'objet des élémens. Ils renferment en effet un grand nombre de propositions intéressantes qui, paroissant d'abord exiger le calcul différentiel, sont développées d'une manière élémentaire. Cependant il est un égard, auquel cet ouvrage m'a paru très-incomplet, quoiqu'il meritât d'être développé avec soin: je veux parler des Pyramides. L'Auteur démontre seulement (& encore le fait-il d'une manière qui ne m'a pas paru complette), que de toutes les Pyramides de même hauteur, qui ont pour base un même rectangle, celle qui est droite a la plus petite surface. Procédant ensuite, comme s'il avoit établi une Théorie générale sur le Minimum de surface des Pyramides droites relativement aux Pyramides obliques, ayant des bases & des hauteurs égales à celles des premières: il établit, sur les Pyramides droites à bases régulières, des propositions qui lui paroissent completter son sujet, & en particulier il se croît fondé à conclure son 3me livre par les deux propositions suivantes: *Sphaera prae solidis omnibus ipsi aequalibus minima superficie circumcinditur. Solidorum omnium sub aequali superficie integra maximum seu capacissimum est sphaera.*

Pappus

Pappus ne nous a transmis qu'une ébauche bien legère des travaux des Anciens ſur cet objet; puisqu'il ſe borne, dans ſon V^{me} livre déja cité, à comparer entr'elles les ſurfaces des cinq ſolides réguliers ſuppoſés égaux. Et pour obtenir ce but particulier, il établit des propoſitions auſſi particulières, qui ne me paroiſſent pas propres à établir une Théorie générale.

Les Pyramides en général, & les Pyramides triangulaires en particulier (dans lesquelles les premières peuvent toujours être décompoſées), peuvent être regardées comme tenant parmi les ſolides le même rang que les triangles tiennent parmi les ſurfaces planes. En particulier, tout comme la Théorie générale, relative à la variation du contour de ces dernières, quand leur ſurface eſt donnée, & réciproquement, eſt fondée ſur les propoſitions établies ſur les triangles: je penſe que l'examen de la variation de la ſurface des Pyramides en général & des Pyramides triangulaires en particulier, quand leur ſurface eſt donnée, & réciproquement, doit précéder l'examen des ſolides en général, ſous le même point-de-vue, & faciliter beaucoup ce dernier examen. Je me propoſe donc dans ce mémoire de traîter des Maxima & Minima relatifs aux ſurfaces des Pyramides de grandeur donnée, & à leur capacité, quand leur ſurface eſt donnée.

Pluſieurs des propoſitions qui ſeront développées dans ce mémoire par la Géométrie élémentaire, peuvent auſſi être réſolues par les premiers principes du calcul différentiel. Mais, je crois que les règles d'une bonne méthode doivent engager à traiter par les voyes les plus ſimples les objets qui en ſont ſuſceptibles. Tous les Mathématiciens conviennent de rejetter la ſolution d'un Problème élémentaire par les Sections coniques, ou quelque courbe supérieure: il me paroît de même, que les sujets qui dépendent des élémens, doivent être traités, autant qu'il est possible, par des méthodes purement élémentaires, dont le grand avantage est d'être plus lumineuses & à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs.

Je pense d'ailleurs que quelques propositions générales auxquelles l'Analyse géométrique nous conduira dans la matière qui fait l'objet de ce mémoire, ne pourroient être que difficilement développées par ce calcul, & tout au moins d'une manière beaucoup moins satisfaisante, que nous ne ferons en état de le faire, en suivant la marche purement géométrique.

§. 2.

Comme je prens pour démontrées les propositions sur les Isopérimètres relatives aux figures planes: je regarde comme convenable de donner les énoncés de celles dont je serai appellé à faire usage, ainsi que de leurs inverses.

1°. De tous les triangles dont la base est donnée de grandeur & de position, & dont le sommet est sur une droite donnée de position, celui dont les jambes sont également inclinées à cette droite, a le plus petit contour. En particulier: de tous triangles dont la base & la hauteur son données, le triangle isoscèle a le plus petit contour.

2°. De toutes les figures données de grandeur & dont le nombre des côtés est donné, la figure régulière a le plus petit contour.

3°. De deux figures égales, celle qui a le plus grand nombre de côtés, a le plus petit contour.

4°. En

4°. En particulier: Le cercle a un contour plus petit qu'aucune figure (rectiligne ou non-rectiligne) qui lui est égale.

§. 3.

À ces propositions élémentaires relatives aux figures planes, j'ajouterai la suivante, que je démontrerai en particulier, à cause de son importance. La 2^{de} Partie de la 1^{re} Prop. du §. précédent n'en est qu'un cas particulier.

Lemme. Soient deux triangles rectangles qui ont une jambe de l'angle droit commune & donnée de grandeur. Soit donnée la somme des rectangles des deux autres jambes de l'angle droit par des droites donnees: La somme des rectangles des Hypothénuses par le mêmes droites respectivement, est la plus petite, lorsque ces deux triangles peuvent convenir.

Soient deux triangles rectangles ACX, ACY, dont une jambe AC de l'angle droit est donnée de grandeur. Soit donnée la somme $CX \times L + CY \times M$ des rectangles des deux autres jambes de l'angle droit par des droites données L & M. La somme $AX \times L + AY \times M$, est la plus petite, lorsque les triangles ACX, ACY, peuvent convenir. Tab. III. Fig. 1.

Soit $CX \times L + CY \times M = CB \times L$.

Donc, $CY \times M = BX \times L$;

& $CY : BX = L : M$. Soit $L : M = AC : BD$; & soit BD perpendiculaire à CB. Puisque $CY : BX = L : M = AC : BD$; les triangles rectangles ACY, DBX, sont semblables; & en particulier, $AY : DX = AC : BD = L : M$. Donc $AY \times M = L \times DX$; & $AY \times M + AX \times L = DX \times L + AX \times L = L(AX + DX)$. Donc la somme $AY \times M + AX \times L$ est la plus petite, lorsque la somme $AX + DX$ est la plus petite;

petite; c'eſt-à-dire lorsque les points A, D, X, ſont en ligne droite. Alors le triangle A C X eſt équiangle au triangle D B X, & partant au triangle A C Y. Donc, les triangles A C X, A C Y, peuvent convenir.

Scholie. Si les deux triangles propoſés avoient des hauteurs données différentes, on trouveroit de même qu'ils doivent être équiangles, pour répondre aux conditions de l'énoncé. Au reſte cette propoſition ſe démontre auſſi très-aiſément par les méthodes des Maxima & Minima.

Ces principes poſés je paſſe à l'objet principal de ce mémoire, en commençant par les Pyramides triangulaires, dont le développement particulier facilitera le dévéloppement général de mon ſujet.

§. 4.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la baſe eſt donnée de grandeur & d'eſpèce, & dont une face eſt donnée de grandeur, celle dans laquelle les deux autres faces ont des hauteurs égales, ou ſont également inclinées au plan de la baſe, a la plus petite ſurface.

Tab. III. Fig. 2. Soit A C B la baſe donnée de grandeur & d'eſpèce d'une Pyramide triangulaire dont la hauteur eſt donnée, & ſoit donnée de grandeur la face décrite ſur le côté A B de la baſe: la ſomme des faces décrites ſur les côtés reſtans A C, B C, eſt la plus petite, lorsque les hauteurs de ces faces ſont égales.

Soit déſigné le ſommet de la Pyramide par S; ſoit P le pié de la hauteur S P; & du point P ſoient abaiſſées ſur les côtés AB, AC, BC, les perpendiculaires PD, PX, PY: les

les lignes SD, SX, SY, feront les hauteurs des faces décrites fur ces côtés.

Soient encore menées, AP, BP, CP, la face ASB étant donnée de grandeur & fa bafe AB étant donnée: la hauteur SD de cette face eft auffi donnée. Dans le triangle rectangle SPD la jambe PD de l'angle droit eft donnée de grandeur, donc le triangle APB eft donné de grandeur; donc la fomme des triangles ACP, BCP eft auffi donnée, ou la fomme des rectangles $AC \times PX$ & $BC \times PY$ eft donnée. Les faces ASC, BSC, font proportionnelles aux rectangles $AC \times SX$ & $BC \times SY$, & la fomme de ces faces eft proportionnelle à la fomme de ces rectangles.

Les triangles rectangles SPX, SPY, ont une jambe commune de l'angle droit SP, & la fomme des rectangles des jambes reftantes de l'angle droit PX, PY, par les droites données AC, BC, eft donnée de grandeur. Donc (§. 3^e^), la fomme des rectangles des Hypothénufes SX, SY, par les mêmes droites, eft la plus petite, lorsque $SX = SY$ & $PX = PY$. Donc auffi la fomme des faces ASC, BSC, eft la plus petite, lorsque leurs hauteurs font égales, & partant, lorsque ces faces font également inclinées au plan de la bafe.

§. 5.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la bafe eft donnée de grandeur & d'efpèce, celle dont toutes les faces font également inclinées au plan de la bafe, a la plus petite furface.

En effet, la grandeur d'une des faces reftant la même: les hauteurs des deux autres faces doivent être égales, pour que la somme de leurs surfaces soit la plus petite (§. 4^e.). Donc les hauteurs des trois faces doivent être égales deux à deux; donc elles doivent être toutes égales entr'elles.

Alors le pié de la hauteur est au centre du cercle inscrit à la base.

§. 6.

Définition. Lorsque la base d'une Pyramide est circonscriptible à une cercle, & que le pié de la hauteur est au centre de ce cercle; j'appellerai cette Pyramide *droite.*

Lorsque la base d'une Pyramide a un centre de figure (un point qui partage en deux parties égales toutes les droites passant par lui & terminées au contour de la figure, comme cela a lieu pour les figures régulières paires); & que le pié de la hauteur est situé sur ce centre, on peut encore apeller cette Pyramide droite: mais dans la suite de ce mémoire, cette expression sera prise dans le premier sens, à moins que je n'en avertisse.

§. 7.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la base est donnée de grandeur, dont un côté de la base est donné, & dont la face décrite sur ce côté est donnée: la Pyramide, dans laquelle les faces restantes ont des bases & des hauteurs égales, a la plus petite surface.

On prouve, tout comme dans le §. 4^e. que la distance du pié de la hauteur au côté donné de la base de la Pyramide est donnée, & partant, que le triangle ayant ce côté pour base & pour sommet le pié de la hauteur de la Pyramide, est donné de grandeur. Mais la surface de la base est donnée; donc, la somme des triangles ayant pour sommet com-

commun le pié de la hauteur, & pour baſes les côtés inconnus de la baſe, eſt donnée de grandeur. Or, quelle que ſoit l'eſpèce de la baſe, ces deux triangles doivent avoir des hauteurs égales, pour que la ſurface de la Pyramide ſoit la plus petite (§. 4^e.). Donc, le rectangle de la diſtance du pié de la hauteur à un des côtés inconnus de la baſe par la ſomme de ces deux côtés inconnus eſt donné. Donc cette diſtance ſera la plus grande, lorsque cette ſomme ſera la plus petite; c'eſt-à-dire (§. 2$^{d.}$ 1°), lorsque la baſe ſera iſoſcèle.

Soient donc deux Pyramides de même hauteur SP, dont l'une ait pour baſe un triangle iſoſcèle ACB, & l'autre un triangle non-iſoſcèle $AC'B$ (dont les baſes & les ſurfaces ſont égales). Soit PX, perpendiculaire à SP, la diſtance du pié de la hauteur aux côtés égaux de la baſe iſoſcèle, & PX' la diſtance de ce pié aux côtés non-donnés de la baſe ſcalène: les lignes SX, SX', feront les hauteurs des faces de ces deux Pyramides, & les ſommes de ces faces ſeront entr'elles comme les rectangles Tab III. Fig. 3.

$$(AC + BC)\,PX \;\&\; (AC' + BC')\,PX'.$$

Je dis que

$$(AC + BC)\,PX < (AC' + BC')\,PX.$$

Soit par X' menée à XS la parallèle $X'S'$, qui rencontre PS en S', il y aura:

Par ſupp. $(AC + BC)\,PX = (AC' + BC')\,PX'$.
Donc, $AC + BC : AC' + BC' = PX' : PX = X'S' : SX$.
Donc, $(AC + BC)\,SX = (AC' + BC')\,S'X'$.
Mais, $S'X' < SX$.
Donc, $(AC' + BC')\,S'X' < (AC' + BC')\,SX'$.
Donc, $(AC + BC)\,SX < (AC' + BC')\,SX'$. *c. q. f. d.*

§. 8.

De toutes les Pyramides triangulaires de même hauteur, dont la base est donnée de grandeur, mais non d'espèce, la Pyramide droite, dont la base est un triangle équilatéral, a la plus petite surface.

En effet: Pour que la surface soit la plus petite, deux côtés quelconques de la base doivent être égaux entr'eux, & les faces décrites sur ces côtés aussi égales entr'elles (§. 7^e.). Donc les trois côtés de la base doivent être égaux deux à deux, & les trois faces doivent être égales deux à deux. Donc les trois côtés de la base doivent être égaux entr'eux, & les trois faces doivent être égales entr'elles, ou la base doit être un triangle équilatéral, & la Pyramide doit être droite.

§. 9.

De toutes les Pyramides triangulaires données de grandeur, le Tétrahèdre régulier a la plus petite surface.

En Effet prenant une face quelconque pour base, cette face doit être un triangle équilatéral, & la Pyramide doit être droite, pour que la somme des trois faces restantes soit la plus petite (§. 8^e.). Donc tant que quelqu'une des faces n'est pas un triangle équilatéral, la surface de la Pyramide n'est pas la plus petite: partant, pour que la surface d'une Pyramide triangulaire donnée de grandeur soit la plus petite, chacune de ses faces doit être un triangle équilatéral, ou la Pyramide doit être un Tétrahèdre régulier.

§. 10.

Les inverses de toutes les propositions précédentes sont aussi vraies & se démontrent sensiblement dela même manière, par le principe général des inverses.

1°. De

1°. De toutes les Pyramides triangulaires, dont la base est donnée de grandeur & d'espèce & dont la surface latérale est donnée, la Pyramide droite a la plus grande solidité.

2°. De toutes les Pyramides triangulaires, dont la base est donnée de grandeur, mais non d'espèce, & dont la surface latérale est donnée, la Pyramide droite, qui a pour base un triangle équilatéral, a la plus grande solidité.

3°. De toutes les Pyramides triangulaires de même surface totale, la Pyramide régulière a la plus grande solidité.

Il me suffira de démontrer l'une d'elles; p. ex. la 1re.

Soient deux Pyramides triangulaires P & P′, aiant une seule & même base & des surfaces latérales égales. Que la 1re soit droite, & que la 2de ne le soit pas: la solidité ou la hauteur de la 1re est plus grande que la solidité ou la hauteur de la 2de.

Soit une Pyramide droite P″, de même base & de même solidité que la Pyramide P′. La surface latérale de la Pyramide P″ est plus petite que la surface latérale de la Pyramide P′ (§. 5^e.); & partant aussi plus petite que la surface latérale de la Pyramide P. Mais les surfaces latérales des Pyramides droites P & P″ sont entr'elles comme les hauteurs de leurs faces: donc la hauteur d'une des faces de P″ est plus petite que la hauteur d'une des faces de P: donc aussi la hauteur de P″ ou P′ est plus petite que la hauteur de P; ou la Pyramide droite P est plus grande que la Pyramide oblique P′ de même base & de même surface latérale.

 §. 11.

§. 11.

Il feroit aifé d'appliquer aux Pyramides à bafes quadrangulaires, les propofitions qui viennent d'être démontrées fur les Pyramides triangulaires, & de parvenir à la conclufion: que de toutes les Pyramides quadrangulaires de même hauteur, & dont la bafe eft donnée de grandeur, la Pyramide droite, qui a pour bafe un quarré, a la furface la plus petite. Mais le procédé qui m'a conduit à la détermination de ce cas particulier, ne me parroiffant pas fufceptible de generalifation: je regarde comme fuperflu de m'y arrêter.

La bafe & la hauteur d'une Pyramide triangulaire étant déterminées: on a pu déterminer cette Pyramide de manière que fa furface fût la plus petite (§. 5^e^.). Mais je ne crois pas qu'on puiffe fe flatter de déterminer généralement la nature d'une Pyramide, dont la hauteur eft donnee & dont la bafe quelconque a un nombre quelconque de côtés, en forte que fa furface foit la plus petite. La difficulté de cette détermination tient à l'imperfection de la Théorie générale des équations; comme je vais le faire comprendre par un exemple qui paroît d'abord des plus fimples.

Tab. III. Fig. 4. Soit A B *b a* un quadrilatère dont deux côtés oppofés A B, *a b*, font inégaux & paralléles, & les deux autres côtés A *a*, B *b*, égaux entr'eux. Que ce quadrilatère doive être la bafe d'une Pyramide de hauteur donnée, ayant la furface la plus petite.

Il eft aifé de montrer (à l'exemple du §. 4^e^.), que le pié de la hauteur doit être fitué fur la droite C *c*, qui joint les milieux C & *c* des deux côtés parallèles A B, *a b*. Soit P ce pié; foit S P la hauteur donnée de la Pyramide; & foient P X, P X′, les perpendiculaires (égales) fur les côtés A *a*, B *b*.

La

La quantité $AB \times CP + ab \times cP + 2Aa \times PX$ étant donnée

La quantité $AB \times SC + ab \times Sc + 2Aa \times SX$ doit être un minimum.

$$\text{Donc } AB \times \partial.CP + ab \times \partial.cP + 2Aa \times \partial.PX = 0.$$
$$AB \times \partial.SC + ab \times \partial.Sc + 2Aa \times \partial.SX = 0.$$

$$\text{Or, } \partial.CP = -\partial.cP.$$
$$\partial.SC = \frac{CP + \partial.CP}{SC}$$
$$\partial.Sc = \frac{cP + \partial.cP}{Sc}$$
$$\partial.SX = \frac{PX + \partial.PX}{SX}.$$

$$\text{De là; } 2Aa \times \partial.PX - \partial.cP\,(AB - ab) = 0; \text{ ou}$$
$$\partial.PX : \partial.cP = AB - ab : 2Aa.$$

$$\text{Puis } 2Aa \times \partial.PX \times \frac{PX}{SX} - \partial.cP\left(AB \times \frac{CP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc}\right) = 0.$$

$$\text{Donc, } \partial.PX : \partial.cP - AB \times \frac{CP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc} : 2Aa \times \frac{PX}{SX}.$$

$$\text{Donc, } AB - ab : 2Aa = AB \times \frac{CP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc} : 2Aa \times \frac{PX}{SX}.$$

$$\text{Donc, } (AB - ab) \times \frac{PX}{SX} = AB \times \frac{CP}{SC} - ab \times \frac{cP}{Sc}.$$

$$\text{Ou, } (AB - ab)\,\text{cos}.SPX = AB + \text{cos}.SPC - ab + \text{cos}.SPc.$$

Cette équation développée, en rapportant les inconnues à la ligne Cc p. ex., devient trop compliquée, pour qu'on doive en esperer la solution générale, quel que soit le rapport de AB à ab, & quelle que soit leur distance.

Il est seulement quelques cas particuliers, dont la détermination devient facile d'après cette formule.

1[er] *Exemple.* Que les lignes AB & ab soient égales; dans lequel cas le quadrilatère $ABba$ devient un parallélolélogramme: l'équation précédente devient,

$$\text{cos. } SCP = \text{cos. } ScP\,;$$

savoir: les deux faces opposées doivent être également inclinées à la base. Nous verrons dans la suite que ce cas est compris dans une proposition générale sur les Pyramides dont la base a un centre de figure.

2[d]. *Exemple.* L'équation précédente est encore résolue toutes les fois que les trois angles SXP, SCP, ScP, peuvent être égaux entr'eux, ce qui a lieu, lorsque le quadrilatère $ABba$ est circonscriptible à un cercle, & que le centre & le pié de la hauteur de la Pyramide coincident. Nous verrons dans la suite que ce cas est aussi compris dans une proposition générale sur les Pyramides dont la base est circonscriptible à un cercle.

Ne pouvant espérer de déterminer généralement la position du pié de la hauteur d'une Pyramide donnée de grandeur, dont la base est donnée de grandeur & d'espèce, pour que, sa capacité restant la même, sa surface latérale soit la plus petite: je vais au moins chercher à déterminer quelque propriété caractéristique de la base, à laquelle puisse répondre un Minimum de surface.

§. 12.

Soient deux Pyramides de même hauteur, dont les bases sont égales tant en surface qu'en contour. Que l'une de ces Pyramides soit droite & que l'autre ne le soit pas; savoir: que la base de la dernière Pyramide ne soit pas circonscriptible à un cercle; ou, si elle l'est, que le pié de la hauteur ne coïncide pas avec le centre de ce cercle: la surface de la 1[re] Pyramide est plus petite que la surface de la 2[de].

Que

Que la 1re Pyramide ſoit déſignée par P & la 2de par P′. La ſurface latérale de la 1re Pyramide eſt égale à un triangle, qui a pour baſe le contour de ſa baſe, & pour hauteur la hauteur d'une de ſes faces, & la ſurface de ſa baſe eſt égale à un triangle qui a pour baſe ſon contour & pour hauteur le rayon du cercle inſcrit.

Soit p le pié de la hauteur de la 2de Pyramide. Que les côtés de ſa baſe ſoyent déſignés par

$a, b, c, d - - - - - i, k;$

& ſoient déſignés par

A, B, C, D - - - - - I, K

les triangles, dans leſquels cette baſe eſt décompoſée par des droites menées du point p à tous ſes ſommets.

Soit fait un triangle l, ayant pour baſe la ſomme des côtés a & b, & qui ſoit égal à la ſomme des triangles A & B. Sur le triangle l ſoit faite une Pyramide L de même hauteur que la Pyramide P, & dont le pié de la hauteur ſoit ſur le ſommet de ſa baſe. Il découle inmédiatement du §. 3^{e}., que la face de la Pyramide L, oppoſée à ſa hauteur, eſt plus petite que la ſomme des faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés a & b.

Soit fait un triangle m, ayant pour baſe la ſomme des baſes des triangles A, B, C, ou L & C, & égal à leur ſomme. Sur le triangle m ſoit faite une Pyramide M de même hauteur que la Pyramide P′, & dont le pié de la hauteur ſoit au ſommet de ſa baſe. La face de la Pyramide M, oppoſée à ſa hauteur, ſera plus petite que la ſomme des faces, auſſi oppoſées à la hauteur, des Pyramides qui ont pour baſes

 les

les triangles *l* & C; & à plus forte raiſon plus petite que la ſomme des trois faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés *a*, *b*, *c*.

Soit fait de même un triangle *n*, égal à la ſomme des triangles *m* & D, & ayant pour baſe la ſomme de leurs baſes. Sur le triangle *n* ſoit la Pyramide N de même hauteur que la Pyramide P′, & dans laquelle le pié de la hauteur ſoit au ſommet de la baſe. La face oppoſée à la hauteur de la Pyramide N ſera plus petite que la ſomme des faces oppoſées à leur hauteur des Pyramides ayant pour baſes les triangles *m* & D; & à beaucoup plus force raiſon plus petite que la ſomme des quatre faces de la Pyramide P′, qui ont pour baſes les côtés *a*, *b*, *c*, *d*.

Soit continuée cette réduction jusqu'au dernier triangle *k* de la baſe de la Pyramide P′; enſorte que toute cette baſe ſoit reduite en un ſeul triangle *t*, ſur lequel ſoit conſtruite une Pyramide T de même hauteur que la Pyramide P′, & dans laquelle le pié de la hauteur ſoit au ſommet de la baſe. Par une ſuite de concluſions *a fortiori*, faites dans chaque reduction, on déduira: que la ſurface de la face de la Pyramide T oppoſée à ſa hauteur, eſt plus petite que la ſomme des faces de la Pyramide P′, ou que ſa ſurface latérale.

Les baſes des deux Pyramides P & P′ étant ſuppoſées égales tant en ſurface qu'en contour: le triangle *t* eſt égal à la baſe de la Pyramide P; & ainſi la baſe du triangle *t* eſt égale au contour de la baſe de la Pyramide P. Donc la hauteur du triangle *t* eſt égale au rayon du cercle inſcrit à la baſe de la Pyramide P. Donc la hauteur de la face de la Pyramide T oppoſée à la hauteur de cette Pyramide eſt égale

à

à la hauteur d'une des faces de la Pyramide P. Donc auſſi, cette face de la 1^{re} Pyramide eſt égale à la ſurface latérale de la 2^{de}. Mais cette face de la Pyramide T a été prouvée plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P′: donc auſſi la ſurface latérale de la Pyramide P′ eſt plus petite que la ſurface latérale de la Pyramide P.

L'égalité ou l'inégalité d'inclinaiſon de toutes les faces d'une Pyramide au plan de ſa baſe, eſt donc la proprieté caractériſtique, d'après laquelle on peut juger ſi cette Pyramide jouit ou ne jouit pas de la propriété du Minimum de ſurface, relativement à toute autre Pyramide, dont la baſe eſt égale à la ſienne, tant en ſurface qu'en contour. La poſſibilité de cette égalité ſuppoſe la réunion de ces deux propriétés: quant à la baſe, qu'elle ſoit circonſcriptible à un cercle; & quant à la Pyramide elle-même, que le pié de la hauteur coïncide avec le centre de ce cercle.

En particulier; un cone droit a une ſurface plus petite qu'un cone oblique de même baſe & de même hauteur.

§. 13.

Remarque 1^{re}. J'ai ſuppoſé dans le § précédent, que dans chaque réduction d'une partie d'une Pyramide oblique propoſée, en une Pyramide triangulaire, de la manière dont il eſt développé dans ce §, on pouvoit tirer une concluſion *a fortiori* ſur la petiteſſe de la face de cette dernière Pyramide oppoſée à ſa hauteur. Cette concluſion devient une concluſion ſimple, lorsque la hauteur de la partie de la baſe reduite en un ſeul triangle, dont la baſe eſt égale au centre de cette partie, ſe trouve égale à la hauteur du triangle ſuivant de la baſe. Cette différence ne change rien dans la concluſion finale. D'ailleurs on peut toujours l'éviter, en ſuivant dans la reduction des triangles de la base l'ordre des grandeurs de leurs hauteurs, à commencer par la plus petite, & finir par la plus grande, & réciproquement.

Remarque 2de. La hauteur d'un triangle, dont la base est égale à la somme des bases d'un nombre quelconque de triangles proposés, & dont la surface est égale à la somme de leurs surfaces, est la somme de toutes les quatrièmes proportionnelles à la somme de leurs bases, à la base & à la hauteur de chacun d'eux.

Remarque 3^{me}. La surface latérale d'une Pyramide droite de hauteur donnée, dépend seulement du contour de sa base & de la hauteur d'une de sa faces. Partant toutes les Pyramides droites de même hauteur, dont les bases sont égales, tant en surface qu'en contour, ont aussi des surfaces latérales égales. En particulier, ces surfaces ne dépendent ni de la figure de la base, ni du nombre de ses côtés. Or le nombre des figures égales, tant en surface qu'en contour, & circonscriptibles à un cercle, est illimité, tant que l'une de ces figures n'est pas un cercle: donc aussi, le nombre des Pyramides de figures différentes, jouissant de la propriété du Minimum de surface, est illimité. Cependant on ne sauroit en conclure que ce sujet donne lieu à une infinité de Minima égaux entr'eux, puisque toutes ces Pyramides ne diffèrent entr'elles que par les différentes transpositions d'un Minimum unique, ainsi qu'il est évident par le procédé développé dans le §. précédent.

Remarque 4^{me}. Il suit en particulier du §. 12^{me}: que, lorsque la base d'une Pyramide est une figure régulière, cette Pyramide a la plus petite surface latérale, lors qu'elle est droite

droite. Ce cas particulier peut auſſi ſe déduire immédiatement du §. 2^d, 1^o, comme il ſuit.

1^{er}. *Cas.* Que la baſe ſoit une figure régulière d'un nombre pair de côtés.

La ſomme des ſurfaces de deux faces, décrites ſur deux côtés oppoſés, eſt proportionnelle à la ſomme des hauteurs de ces deux faces. Mais ces deux hauteurs ſont les deux côtés d'un triangle dont la hauteur eſt donnée, ſavoir la hauteur de la Pyramide, & dont la baſe eſt auſſi donnée, ſavoir la diſtance de ces deux côtés, ou le diamètre du cercle inſcrit à la baſe. Donc, la ſomme de ces deux hauteurs eſt la plus petite, lorsqu'elles ſont égales; donc auſſi, la ſomme de deux faces oppoſées quelconques d'une Pyramide à baſe régulière d'un nombre pair de côtés, eſt la plus petite, lorsque ces deux faces ont des hauteurs égales. Donc la ſurface totale de la Pyramide eſt la plus petite, lorsque toutes les faces ont des hauteurs égales, & partant, lorsque la Pyramide eſt droite.

On démontre de même: que, lorsque la baſe d'une Pyramide a un centre de figure, le pié de ſa hauteur doit coïncider avec ce centre, pour que ſa ſurface ſoit la plus petite. Et cela s'applique en particulier aux Pyramides qui ont pour baſe un parallélogramme.

2^d. *Cas.* Que la baſe ſoit une figure régulière d'un nombre impair de côtés.

Que la ſurface d'une des faces reſte la même; & partant, que la diſtance du pié de la hauteur à un des côtés de la baſe reſte la même. Ce pié ſera ſitué ſur une droite donnée de poſition parallèle à ce côté. Il eſt très aiſé de montrer, que la ſomme de deux triangles, ayant ce pié pour ſommet, & pour baſes deux côtés quelconques également éloignés du premier de part & d'autre de lui, eſt toujours la même. Donc la ſomme des hauteurs de ces deux triangles eſt auſſi donnée. Mais la ſomme de ces deux hauteurs peut être priſe pour la baſe d'un triangle ayant pour hauteur la hauteur donnée de la Pyramide, & dont les côtés ſeroit les hauteurs des faces décrites ſur ces deux côtés de la baſe. Donc la ſomme des hauteurs de ces deux faces eſt la plus petite, lorsque ces hauteurs ſont égales. Donc auſſi, la ſomme de ces deux faces (qui eſt proportionelle à la ſomme de ces hauteurs) eſt la plus petite, lorsqu'elles ſont egales. Donc, une face reſtant la même, la ſomme de toutes les faces reſtantes eſt la plus petite, lorsque deux faces également éloignées de la 1^re^ ont des hauteurs égales; c'eſt-à-dire lorsque le pié de la hauteur eſt également éloigné de deux côtés quelconques, ſitués à une même diſtance de la baſe de cette 1^re^ face; c'eſt-à-dire lorsque ce pié eſt ſur la droite perpendiculaire à ce côté & paſſant par ſon milieu; ou, ſur la droite qui joint le milieu de ce côté avec le ſommet oppoſé de la figure. Partant, pour que la ſurface totale ſoit la plus petite, le pié de la hauteur doit ſe trouver ſur chacune des droites, qui joignent les milieux de chacun des côtés de la baſe avec le ſommet oppoſé, & partant au centre de cette baſe.

On montre de même que, lorsque la baſe d'une Pyramide de hauteur donnée a un axe de figure; le pié de la hauteur doit être ſitué ſur cet axe, pour que la ſurface de la Pyramide ſoit la plus petite.

§. 14.

§. 14.

De toutes les Pyramides droites de même hauteur dont la base est donnée de grandeur, & dont le nombre des côtés de la base est donné, celle qui a pour base une figure régulière, a la plus petite surface.

La démonstration est très-sensiblement la même que celle qui est contenue dans le §. 7^e^.

En effet. Soient P & P′ deux Pyramides droites de même hauteur, dont les bases sont égales, & ont des nombres égaux de côtés. Que la base de la 1^re^ Pyramide soit régulière, & que la base de la 2^de^ ne le soit pas. Partant (§. 2^d^, 2°.); le contour de la base de la 1^re^ est plus petit que le contour de la base de la 2^de^; donc au contraire, le rayon du cercle inscrit à la 1^re^ base est plus grand que le rayon du cercle inscrit à la 2^de^. Soient ces rayons P X et P X′; & soient désignés par C. B & C. B′ les contours des deux bases. Soit P S la hauteur commune des deux Pyramides; S X & S X′, seront les hauteurs des faces; & les surfaces latérales de ces Pyramides seront entr'elles comme $SX \times C.B$ & $SX' \times C.B'$. Soit $X'S'$ parallèle à XS. Tab. III. Fig. 3.

$$SX : S'X' = PX : PX' = C.B' : C.B.$$

Donc, $SX \times C.B = S'X' \times C.B'$.

Mais, $S'X' < SX'$.

Donc, $S'X' \times C.B' < SX' \times C.B'$.

Donc, $SX \times C.B < SX' \times C.B'$.

Or la surface latérale d'une Pyramide droite à base régulière est plus petite que la surface latérale d'une Pyramide droite à base irrégulière de même hauteur, de même capacité & du même nombre de faces.

§. 15.

§. 15.

De deux Pyramides droites de même hauteur & à bases régulières égales, celle dont le nombre des faces est le plus grand, a la plus petite surface.

La démonstration est la même que celle du §. précédent, en partant du 3° du §. 2[d].

§. 16.

En particulier (d'après le 4°. du §. 2[d].), la surface courbe d'un cône droit est plus petite que la surface latérale d'une Pyramide droite à base régulière de même hauteur & de même capacité que lui. Et à plus forte raison la surface d'un cone droit est plus petite que celle d'aucune Pyramide de même hauteur & dont la base est égale à la sienne.

§. 17.

Les inverses des propositions précédentes se démontrent d'une même manière, & par le principe général des inverses.

1°. De toutes les Pyramides dont les bases sont égales tant en surface qu'en contour, & dont les surfaces latérales sont égales, celle qui est droite a la plus grande hauteur ou solidité.

2°. De toutes les Pyramides droites, dont les bases sont égales, dont les surfaces latérales sont égales, & dont le nombre des faces est le même, celle dont la base est régulière, a la plus grande hauteur ou solidité.

3°. De

3°. De deux Pyramides droites à bases régulières égales, & dont la surface latérale est la même, celle dont la base a le plus grand nombre de côtés, a la plus grande hauteur ou solidité.

4°. Un cone droit a une hauteur ou capacité plus grande qu'aucune Pyramide dont la base est égale à la sienne & dont la surface latérale est égale à la surface courbe du cone.

Je me contenterai de démontrer l'une de ces inverses, par exemple la 1^{re}.

Soient deux Pyramides P et P′ dont les bases sont égales tant en surface qu'en contour. Que la 1^{re} soit droite & la 2^{de} oblique, & que leurs surfaces latérales soient égales. La hauteur de la 1^{re} est plus grande que la hauteur de la 2^{de}.

Soit P″ une Pyramide droite de même base que la Pyramide P, & de même hauteur que la Pyramide P′. Partant la surface latérale de P″ est plus petite que la surface latérale de P′ (§. 12.) ou P (supp.). Mais les contours des bases des Pyramides droites P″ & P sont égaux. Donc la hauteur d'une face de la Pyramide P″ est plus petite que la hauteur d'une face de la Pyramide P; donc aussi la hauteur de la Pyramide P″ ou P′ est plus petite que la hauteur de la Pyramide P.

Je passe à la détermination de l'espèce d'un cone droit & d'une Pyramide droite dont la base est donnée d'espèce; pour que, la capacité étant la même, la surface totale soit la plus petite, & réciproquement.

§. 18.

Lemme. Soit un cone droit & ſoit une Pyramide droite circonſcrite à ce cone. La ſurface, ſoit totale ſoit courbe du cone droit eſt à la ſurface ſoit totale ſoit latérale de la Pyramide, comme la ſolidité du cone eſt à la ſolidité de la Pyramide.

Démonſt. Les ſurfaces des baſes du cone & de la Pyramide ſont entr'elles comme leurs contours. Le côté du cone eſt égal à la hauteur d'une des faces de la Pyramide; donc auſſi, la ſurface courbe du cone & la ſurface latérale de la Pyramide ſont entr'elles comme les contours de leur baſes. Enfin le cone & la Pyramide ayant même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, ou comme les contours de ces dernières. Donc, les ſolidités du cone & de la Pyramide, leurs ſurfaces totales, & leurs ſurfaces courbe & latérale, ſont entr'elles dans un même rapport, celui des contours des baſes.

§. 19.

Corollaire. Soient deux Pyramides droites, à baſes ſemblables, circonſcrites à des cones droits de même hauteur: les ſurfaces & les ſolidités de ces deux Pyramides ſont entr'elles comme les ſurfaces & les ſolidités de ces deux cones.

§. 20.

De tous les cones droits de même capacité, celui dont le côté eſt triple du rayon de la baſe, a la plus petite ſurface totale. Et réciproquement, ce cone a la plus grande ſolidité avec la même ſurface totale.

Soit C un cone droit dont le côté eſt triple du rayon de la baſe; & C′ un cone droit égal à lui dont le côté n'eſt pas

pas triple du rayon de la baſe : la ſurface totale du premier cone eſt plus petite que la ſurface totale du ſecond.

Soient circonſcrites à ces deux cones des Pyramides P & P′, ayant pour baſes des triangles équilatéraux.

La hauteur d'une des faces de la Pyramide P eſt triple du rayon du cercle inſcrit à ſa baſe (Supp.); donc cette Pyramide eſt un Tétrahèdre régulier; & la Pyramide P′ n'eſt pas un Tétrahèdre régulier.

Par le §. 19 : $C : C' = P : P'$; mais, $C = C'$ (Supp.); donc, $P = P'$. Donc (§. 9.) ſurf. $P <$ ſurf. P'. Mais (§. 19.) ſurf. P : ſurf. $P' =$ ſurf. C : ſurf. C'. Donc ſurf. $C <$ ſurf. C'.

Réciproquement. Surf. C : ſurf. $C' =$ ſurf. P : ſurf. P' (§. 19.). Mais (Supp.), ſurf. $C =$ ſurf. C'; donc, ſurf. $P =$ ſurf. P'. Donc (§. 10. 3°.) ſol. $P >$ ſol. P'. Mais (§. 19.) ſol. P : ſol. $P' =$ ſol. C : ſol. C'. Donc, ſol. $C >$ ſol. C'.

§. 21.

De toutes les Pyramides droites dont la baſe eſt donnée d'eſpèce, celle dont la hauteur d'une des faces eſt triple du rayon du cercle inſcrit à la baſe, a la plus petite ſurface totale avec la même ſolidité, & réciproquement, la plus grande ſolidité avec la même ſurface totale.

La démonſtration ſe déduit du §. précédent par l'inſcription d'un cone aux Pyramides propoſées, de la même maniere que les propoſitions correſpondantes ſur le cone ont été déduites de ce qui a été démontré ſur les Pyramides triangulaires.

Après m'être occupé de la variation des ſurfaces totales des Pyramides & des cones de grandeur donnée, & réciproquement, je vais m'occuper de la variation de leurs ſurfaces latérales ou courbes ſeulement.

§. 22.

Lemme 1er. Lorsqu'on doit couper une droite en trois parties dont le ſolide (le parallélépipède rectangle ayant ces trois parties pour arrètes) ſoit le plus grand poſſible: il faut la couper en trois parties égales.

En effet. Qu'elle que ſoit une des parties, le rectangle des deux autres eſt le plus grand lorsqu'elles ſont égales entr'elles (§. 2. inverſe du 2°.). Donc ces trois parties doivent être égales deux à deux; donc elles doivent être toutes égales entr'elles.

Scholie. Le raiſonnement eſt le même, pour montrer que le produit continuel de toutes les parties d'un nombre coupé en un nombre propoſé de parties, eſt le plus grand, lorsque ces parties ſont toutes égales entr'elles.

§. 23.

Corollaire. Soit une droite donnée de grandeur à diviſer en deux parties dont on fait le ſolide du quarré de l'une par l'autre: ce ſolide eſt le plus grand, lorsque la 1re partie eſt double de la 2de.

Tab. III. Fig. 5. Soit la ligne A B à couper en X en deux parties, telles que le ſolide $AX^2 \times BX$ ſoit le plus grand. Je dis: que A X doit être double de B X.

Soit

Soit $AX = 2\,AX' = 2\,XX'$.

Donc $AX^2 = 4\,AX' \times XX'$.

Donc $AX^2 \times BX = 4\,AX' \times XX' \times BX$.

Donc, le ſolide $AX^2 \times BX$ eſt le plus grand, lorsque le ſolide $AX' \times XX' \times BX$ eſt le plus grand; c'eſt-à-dire (§. 22.) lorsque $AX' = XX' = BX$; & partant $AX = 2\,BX$.

Scholie. On montre de même, que le produit des puiſſances des parties d'une nombre, dont les expoſans ſont donnés, eſt le plus grand, lorsque ces parties ſont entr'elles comme ces expoſans.

§. 24.

Lemme 2^d^. De tous les cones droits inſcrits à une même ſphère, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté, a la plus grande ſolidité. Et réciproquement: de tous les cones droits donnés de grandeur, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, eſt inſcriptible à la plus petite ſphère.

Soit AVYB le demi-cercle générateur d'une ſphère dont AB eſt le diamètre. Soit AXY le triangle générateur d'un cone droit inſcrit à cette ſphère: ce cone eſt le plus grand, lorsque $AX^2 = 2\,XY^2$. Tab. III. Fig. 6.

En effet. La ſolidité de ce cone eſt proportionnelle au ſolide $AX \times XY^2$, c'eſt-à-dire au ſolide $AX \times AX \times BX$, ou au ſolide $AX^2 \times BX$. Donc ce cone eſt le plus grand, lorsque le ſolide $AX^2 \times BX$ eſt le plus grand; c'eſt-à-dire (§. 23.) lorsque $AX = 2\,BX$. Alors, $AX^2 = 2\,BX \times AX = 2\,XY^2$.

Réciproquement. Soient AZV, $AX'Y'$, les triangles générateurs de deux cones droits égaux C' & C, dans l'un desquels $AX'Y'$, $\overline{AX'}^2 : \overline{X'Y'}^2 = 2 : 1$; tandis que dans l'autre ce rapport n'a pas lieu; la ſphère circonſcrite au 1er cone eſt plus petite que la ſphère circonſcrite au 2d.

Soit AVB le demi-cercle générateur de la ſphère circonſcrite au cone C'. Puiſque le quarré de AZ n'eſt pas double du quarré de ZV; AZ n'eſt pas double de BZ. Soit $AX = 2BX$, & ſoit AXY le triangle générateur d'un cone droit C'', inſcrit à la ſphère dont AB eſt le diamètre. Partant (par la directe), le cone C'' eſt plus grand que le cone C' ou C. Mais les deux cones C & C'' ſont ſemblables; donc les dimenſions du premier ſont plus petites que les dimenſions correſpondantes du 2d. Soit $Y'B'$ perpendiculaire à AY'; AB' eſt le diamètre de la ſphère circonſcrite au cone C'; & $AY : AY' = AB : AB'$. Mais $AY > AY'$; donc $AB > AB'$.

§. 25.

Lemme 3e. La ſurface courbe d'un cone droit eſt en raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée de ſa ſolidité & du diamètre de la ſphère circonſcrite.

Soit AXY le triangle générateur d'un cone droit; & AB le diamètre de la ſphère circonſcrite.

La ſurface courbe eſt en raiſon compoſée de XY & de AY; c'eſt-à-dire en raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée du quarré de XY & du quarré de AY, qui eſt égal au rectangle de AB par AX. Partant cette ſurface courbe eſt en raiſon

raiſon ſousdoublée de la raiſon compoſée du diamètre A B & du ſolide $XY^2 \times AX$, ou du cone lui-même.

§. 26.

Corollaire. De tous les cones droits inſcrits à une même ſphère, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe comme la diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface. Et réciproquement: de tous les cones droits dont la ſurface courbe eſt donnée, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, eſt inſcriptible à la plus petite ſphère.

La démonſtration de la directe découle immédiatement du §. précédent combiné avec la directe du §. 24. Et la démonſtration de l'inverſe eſt la même que celle de l'inverſe de ce dernier §.

§. 27.

De tous les cones droits de même capacité, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté, a la plus petite ſurface courbe. Et réciproquement: de tous les cones droits de même ſurface courbe, celui dont la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport aſſigné, a la plus grande ſolidité.

Dém. 1°. La ſolidité étant donnée, la ſurface courbe eſt en raiſon ſousdoublée du diamètre de la ſphère circonſcrite (§. 25.). Donc cette ſurface eſt la plus petite, lorſque ce diamètre eſt le plus petit; c'eſt-à-dire (§. 24.) lorſque la hauteur eſt au rayon de la baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté.

2°. La

2°. La surface courbe étant donnée, la solidité est en raison inverse du diamètre de la sphère circonscrite (§. 25.). Donc cette solidité est la plus grande, lorsque ce diamètre est le plus petit; c'est-à-dire (§. 26.) lorsque la hauteur est au rayon de la base dans la rapport assigné.

§. 28.

De toutes les Pyramides droites, dont la base est donnée d'espèce, celle dont la hauteur est au rayon de la base comme la diagonale d'un quarré est à son côté, a la plus petite surface courbe avec la même solidité; & réciproquement, la plus grande solidité avec la même surface courbe.

La démonstration est déduite du §. précédent, de la même manière que les propositions du §. 21. découlent de celle du §. 20.

§. 29.

De tous les solides de même capacité, formés par deux cones opposés à la base, celui qui est formé par deux cones droits égaux, dans chacun desquels la hauteur est au rayon de la base la comme diagonale d'un quarré est à son côté, a la plus petite surface totale; & réciproquement:

1°. Ce solide, que j'appellerai *Fuseau conique*, doit être formé par deux cones droits (§. 12.).

2°. Ces deux cones doivent avoir des hauteurs égales, & partant pouvoir convenir. En effet, la base restant la même, la somme des hauteurs des deux cones qui le forment, est donnée; & cette somme peut être prise pour la base d'un triangle dont la hauteur est donnée; savoir le rayen de la base

com-

commune des deux cones. Donc la ſomme des côtés d'un triangle, qui ſont les côtés des deux cones, eſt la plus petite, lorsqu'ils ſont égaux (§. 2^d. 1°.) Mais la ſurface du fuſeau eſt proportionnelle à la ſomme de ces côtés; donc cette ſurface eſt la plus petite, lorsque les côtés des deux cones qui le forment, ſont égaux; & partant, lorsque ces deux cones peuvent convenir.

3°. La ſurface totale du fuſeau eſt la plus petite, lorsque la ſurface courbe de l'un des cones qui le forment, eſt la plus petite; c'eſt-à-dire, lorsque la hauteur de ce cone eſt au rayon de ſa baſe dans le rapport de la diagonale d'un quarré à ſon côté (§. 27.).

L'inverſe ſe démontre de la même manière que celles qui ont été développées précédemment, en prenant pour lemme dans la 2°: que de tous les triangles de même hauteur, dont la ſomme des côtés eſt donnée, celui qui eſt iſoſcèle eſt le plus grand.

§. 30.

De tous les fuſeaux pyramidaux, dans lesquels la baſe commune des deux Pyramides qui les forment eſt donnée d'eſpèce & circonſcriptible à un cercle, celui qui eſt formé par deux Pyramides droites qui peuvent convenir, dans chacune desquelles la hauteur eſt au rayon du cercle inſcrit à la baſe comme la diagonale d'un quarré eſt à ſon côté, a la plus petite ſurface avec la même ſolidité, & la plus grande ſolidité avec la même ſurface.

La démonſtration eſt la même que celle du §. 21.

En particulier. L'Octahèdre régulier a une ſurface plus petite qu'aucun ſolide égal à lui formé par deux Pyramides droites à baſes quarrées; & à plus forte raiſon: la ſurface de l'Octahèdre eſt plus petite que celle d'aucun ſolide égal à lui, formé par deux Pyramides quadrangulaires ou triangulaires quelconques, & réciproquement.

§. 31.

Définition. Soit une figure plane quelconque, & ſoit un point hors de cette figure plane. Soit une droite fixée à ce point, & qui ſe meuve autour de cette figure: elle engendrera une ſurface que j'appellerai *Surface Pyramidale*; & l'eſpace compris entre cette ſurface & la 1re figure, ſera appellé *Solide Pyramidal.* Je vais chercher ſi la propriété du Minimum de ſurface avec la même capacité, & du Maximum de capacité avec la même ſurface, dont jouit un cone droit relativement à une Pyramide quelconque de même hauteur, lui appartient encore relativement à un ſolide pyramidal quelconque. Pour cela je vais développer la 1re vérité d'une manière un peu différente de la précédente & plus ſuſceptible de généraliſation.

Soit une Pyramide quelconque dont la ſurface de la baſe & dont la hauteur eſt donnée: je vais chercher quelque propriété caractériſtique de la baſe, à laquelle ſoit jointe quelqu'autre propriété relative à la poſition du pié de la hauteur, pour que la ſurface ſoit la plus petite.

Soit décompoſée la baſe d'une Pyramide en trapèzes, par des droites parallèles entr'elles; de manière que chacune des deux parties du contour de la baſe, compriſes entre deux parallèles voiſines, ſoit une ſeule ligne droite. Soit M N *n m*

un

un de ces trapèzes. Les deux parallèles MN, *mn*, restant de la même grandeur, & leur distance restant la même, la grandeur de ce trapèze reste aussi la même. Item, la distance de chacune de ces parallèles au pié P de la hauteur de la Pyramide restant la même: les triangles MPN, *m*P*n*, sont donnés de grandeur, & la somme des deux triangles MP*m*, NP*n*, est aussi donnée de grandeur. Soit S le sommet de la Pyramide. Chacune des deux droites M*m*, N*n*, sert de base à deux triangles, MP*m*, MS*m*; NP*n*, SN*n*; les hauteurs des triangles MS*m*, NS*n*, sont les hypothénuses de deux triangles rectangles, dont une jambe commune SP de l'angle droit est donnée, & dont les autres jambes sont les hauteurs des deux triangles MP*m*, NP*n*. Donc (§. 3.) la somme des deux triangles MS*m*, NS*n*, est la plus petite, lorsque ces deux triangles sont également inclinés au plan de la base de la Pyramide, quelles que soient les lignes M*m* & N*n*; & la grandeur des lignes M*m* & N*n* étant variable, la somme de ces deux triangles est la plus petite possible lorsqu'elles sont égales (d'après le §. 7.). Donc, pour que la somme des triangles MS*m*, NS*n*, soit la plus petite, les lignes M*m* & N*n* doivent être égales entr'elles, & partant, leur inclinaison en dedans de la figure à l'une des paralléles, telle que MN, doit être la même. Ces mêmes droites doivent être également éloignées du pié P de la hauteur; & partant, le point P est situé sur la droite qui coupe en deux parties égales l'angle formé par les droites M*m*, N*n*, prolongées, ou sur la droite perpendiculaire à chacune des droites MN & *mn*, & passant par leurs milieux. Tab III. Fig. 7.

Appliquant cette propriété à chacun des trapèzes, dans lesquels la base peut être décomposée par des droites parallèles entr'elles: on trouve que la Pyramide, jouissant du Minimum de ſurface, doit être telle: 1°. que ſa baſe ait un axe de figure, ou une droite qui coupe en deux parties égales les droites qui lui ſont perpendiculaires & terminées au contour de la figure; 2°. que le pié de la hauteur ſoit ſitué ſur cet axe.

Ces deux caractères ne dépendent point du nombre des côtés de la baſe, ou de la diſtance des deux parallèles voiſines, par leſquelles cette baſe eſt décompoſée en trapèzes; & quelle que ſoit la figure de la baſe, on peut lui inſcrire & lui circonſcrire des figures rectilignes qui en diffèrent moins que d'aucune quantité aſſignée. Partant on peut appliquer ces caractères aux ſolides pyramidaux quelconques. Savoir: le ſolide pyramidal de hauteur donnée, dont la baſe eſt donnée de grandeur, & qui doit jouir de la propriété du Minimum de ſurface, doit être tel que ſa baſe ait un centre de figure, & que le pié de ſa hauteur ſoit ſur cet axe de figure. Mais la première de ces propriétés doit avoir lieu ſuivant une direction quelconque; & le cercle eſt la ſeule figure qui ait un axe de figure ſuivant une direction quelconque. Partant le ſolide pyramidal jouiſſant de la propriété de Minimum-Minimorum de ſurface entre tous les ſolides pyramidaux de même hauteur & de même capacité, doit avoir pour baſe un cercle, & le pié de la hauteur doit être au centre de ce cercle. Donc ce ſolide eſt un cone droit.

L'inverſe ſur le Maximum de capacité, quand la baſe & la ſurface courbe ſont données, ſe déduit du principe général des inverſes.

Ce §. peut être regardé comme renfermant la plus grande partie des propoſitions développées dans ce mémoire. Ainſi

Ainſi le nombre des côtés d'une figure rectiligne étant donné, le nombre de ſes axes de figure eſt le plus grand, lorsqu'il eſt égal au nombre de ces côtés; ou lorsque la figure eſt régulière, le nombre des côtés étant pair ou impair indifféremment, & le nombre des axes d'une figure régulière eſt d'autant plus grand que le nombre de ſes côtés eſt plus grand. Partant de toutes les Pyramides de même hauteur, dont la baſe donnée de grandeur a un nombre donné de côtés, la Pyramide droite à baſe régulière, a la plus petite ſurface. Cette ſurface eſt d'autant plus petite que le nombre des côtés de la baſe (quand ce nombre eſt variable) eſt plus grand; & en particulier, le cone droit a une ſurface plus petite qu'aucune Pyramide de même baſe & de même hauteur. Mais on ne ſauroit, je crois, en déduire immédiatement l'eſpèce du cone droit qui jouit de la propriété du Minimum Minimorum de ſurface.

§. 32.

Les propoſitions élémentaires qui ſont la baſe de ce mémoire, s'appliquent très-heureuſement, non ſeulement à la détermination du ſolide pyramidal qui jouit de la propriété du Minimum de ſurface entre tous les ſolides pyramidaux de même capacité; mais encore à la détermination du ſolide qui jouit de la propriété du Minimum Minimorum de ſurface, relativement à tout autre ſolide qui lui eſt égal.

Soit un ſolide quelconque terminé par des ſurfaces planes. Soit coupé ce ſolide par deux plans parallèles entr'eux; puis par deux autres plans auſſi parallèles entr'eux, & par exemple perpendiculaires aux premiers. Que les diſtances mutuelles de ces quatre plans ſoient aſſés petites, pour que chacune des deux parties de la ſurface du ſolide compriſes entr'eux ſoit une ſeule ſurface plane.

 Soit

Tab. III. Fig. 8. Soit $M N n m m' n' N' M'$, le folide terminé par les quatre plans coupans, $M n$, $M N'$, $m' n$, $m' N'$, & par les parties $M m'$, $N n'$, de la furface du folide: les plans parallèles $M N'$, $m n'$, font coupés par le plan $M m'$; donc les lignes $M M'$, $m m'$, font parallèles, de même les lignes $M m$, $M' m'$, font parallèles; donc, le quadrilatère $M m'$ eft un parallélogramme. De la même manière le quadrilatère $N n'$ eft un parallélogramme.

Par m' foient menées à $n' N'$, $n' n$, les parallèles $m' L'$, $m' l$, & par les lignes $m' L'$, $m' l$, foit fait paffer un plan, $m' L' L l$, qui retranchera du folide $M N' m' n$, le parallélépipède $L N' m' n$.

Les diftances mutuelles & les grandeurs des lignes $M N$, $m n$, $M' N'$, $m' n'$, reftant les mêmes: chacun des quadrilatères, tels que $M' N' n' m'$, eft donné de grandeur, & le parallélogramme $m' L' N' n'$, eft auffi donné de grandeur; donc le parallélépipède $L n N' m'$, eft donné de grandeur. Par les droites $m' m$, $m' L'$, foit fait paffer un plan, dont les communes fections avec les plans $M n$, $m N'$, foient $m l'$ & $L' l'$ Le folide reftant $M' m L m'$ fera décompofé en deux prismes triangulaires, l'un & l'autre donnés de grandeur: l'un, $M m l' L' m' M'$, a pour bafe le triangle donné de grandeur $M' L' m'$, & pour hauteur la diftance donnée des deux plans parallèles $M n$, $M' n'$; l'autre, $L L' l' m m' l$, a pour bafe le triangle donné de grandeur $m m' l$, & pour hauteur la diftance des deux plans parallèles $M N'$, $m n'$. Donc tout le folide $M n N' m'$ eft donné de grandeur, tant que les pofitions mutuelles des quatre plans coupans reftent les mêmes.

Soit

Soit $m'P$ la diftance des deux plans Mn, $M'n'$. Soient menées (ou conçuës menées) les diagonales $m'M$, $m'L$, & les droites PM, PL. La bafe ML & la hauteur du triangle MPL font données de grandeur; donc ce triangle eft donné de grandeur. Mais tout le quadrilatère $MLlm$ eft donné de grandeur; donc la fomme des deux triangles MPm, LPl, eft donnée de grandeur. Or les droites Mm, Ll, qui font les bafes des deux triangles MPm, LPl, font auffi les bafes des deux triangles Mmm', Llm'; & les hauteurs de ces derniers triangles font les hypothénufes de deux triangles rectangles, qui ont pour jambe commune de l'angle droit la droite donnée $m'P$, & dont les autres jambes de l'angle droit font les hauteurs des deux triangles MPm, LPl. Donc (§. 3.), la fomme des triangles Mmm', Llm', eft la plus petite, lorsque leurs hauteurs font égales; & enfuite, (§. 7.) lorsque les bafes Mm & Ll font auffi égales. Donc auffi, la fomme des faces Mm', Nn', eft la plus petite, lorsque leurs bafes, leurs hauteurs, & leurs inclinaifons à l'un quelconque des quatre plans coupans font égales.

Quelque foit un folide terminé par des furfaces courbes, on peut lui infcrire ou lui circonfcrire un folide terminé par des furfaces planes, de manière que tout ce qui fe dit de la grandeur de l'un de ces folides & de celle de ces parties, puiffe fe dire de la grandeur de l'autre & de celle de fes parties correfpondantes à celles du premier.

De là découle la propriété caractériftique du folide de grandeur donnée jouiffant de la furface courbe la plus petite. Coupant ce folide par un plan quelconque, les élémens de la furface du folide adjacens à ce plan, doivent lui être également inclinés en dedans du folide, ce qui eft la propriété diftindiſtinctive de la ſphère. Item, menant dans le plan coupant une droite quelconque, les élémens de la commune ſection de la ſurface du ſolide & de ce plan adjacens à cette droite, doivent lui être également inclinés en dedans de la figure, ce qui eſt la propriété caractériſtique du cercle. Partant, ſi on coupe, par un plan quelconque, le ſolide qui avec la même capacité a la ſurface la plus petite, la ſection du ſolide par ce plan doit être un cercle; ce qui eſt la propriété diſtinctive de la ſphère.

Item. Soient deux ſolides compris entre deux mêmes plans parallèles entr'eux, tels que les ſections de ces deux ſolides par un plan quelconque parallèle aux premiers ſoient égales en ſurface. Que l'un de ces ſolides ſoit un ſolide de révolution autour d'un axe perpendiculaire à ces plans, tandis que l'autre ne jouit pas de cette propriété: la ſurface du 1er ſolide eſt plus petite que la ſurface du 2^{d}.

Scholie. La propriété de la ſphère de jouir du Minimum Minimorum de ſurface avec une capacité donnée, & réciproquement, eſt affirmée depuis longtems par un grand nombre de Géomètres. Cependant, les démonſtrations élémentaires que j'en connois, ne s'étendent qu'aux ſolides terminés par des ſurfaces planes, cylindriques ou coniques droites, & circonſcriptibles à quelque ſphère, & elles ne peuvent s'étendre aux autres ſolides, qu'entant qu'on auroit déjà démontré que les premiers jouiſſent de la propriété du Minimum de ſurface relativement aux dernieres, ainſi que cela eſt démontré pour le Cylindre d'Archimède relativement à un priſme quelconque. Il paroiſſoit donc que la détermination rigoureuſe de cette propriété dépendoit de la théorie générale des Maxima & Minima, telle qu'elle eſt due au génie du grand Euler, &

à

à ſes travaux ſucceſſifs, joints à ceux de quelques autres princes des Géomètres pour la perfectionner, parmi lesquels ſe diſtingue M. de la Grange. La généralité des applications du Calcul des Variations, ſans lequel on ne peut réſoudre les plus belles queſtions, ſoit des Mathématiques pures, ſoit des Mathématiques mixtes, en fait ſentir la néceſſité d'une manière trop évidente & trop ſatisfaiſante, pour qu'on ne ſoit pas pénétré tout à la fois d'admiration & de reconnoiſſance, en étudiant les découvertes de ces génies également vaſtes & profonds. Cependant, comme le défaut, ſoit de tems ſoit de capacité, met le plus grand nombre des amateurs des Mathématiques, ou des branches qui en dépendent, hors d'état de pouſſer leurs études jusqu'aux derniers confins de cette ſublime ſcience: je crois que c'eſt au moins rendre quelque ſervice à cet ordre nombreux de perſonnes, que de montrer, quand cela eſt poſſible, la réduction des propoſitions les plus générales à des principes plus ſimples que ceux qui ſervent de baſe à de Théories dont l'étude exige une grande dépenſe de temps & d'application. C'eſt là le but principal que je me ſuis propoſé dans la compoſition de ce mémoire. Sans cela quelques unes des propoſitions qui y ſont contenues, telles que celles des §. 20 & 27., ſe réſolvent avec plus de briéveté d'après les premiers principes du Calcul différentiel; ſurtout, quand on s'en tient à la détermination ſimple du cas qui répond à quelque limite, ſans s'aſſurer, par une ſeconde différentiation, ou autrement, de l'eſpèce de cette limite.

La ſimplicité des procédés purement géométriques & l'évidence qui les accompagne, les rendent ſans doute très-récommendables dans le plus grand nombre des cas où ils peuvent être employés. Mais la limitation de leurs applications, & le défaut de règles générales qui dirigent, dans ces applications, ſont bien propres à faire ſentir leur inſuffiſance, & la néceſſité de recourir aux calculs ſuperieurs, qui nous préſentent des reſſources incomparablement plus ſûres & plus étendues. Qu'il me ſuffiſe d'en citer deux exemples relatifs à la manière qui fait l'objet de ce mémoire, & à des ſujets de Géométrie élémentaire. 1°) À une ſphére donnée, inſcrire le cone droit dont la ſurface totale eſt la plus grande (on determine en même temps celui de ces cones, dans lequel la différence, au lieu de la ſomme de la ſurface courbe & de la ſurface de la baſe, eſt la plus grande). 2°) Déterminer la plus grande des Pyramides triangulaires dont les quatre faces ſont données de grandeur. Je crois qu'on s'obſtineroit en vain à appliquer les élémens aux ſolutions de ces deux queſtions. Voyez ſur la dernière l'ingénieux mémoire de M. de la Grange qui a pour tître: *Solutions analytiques de quelques problèmes ſur les Pyramides triangulaires*, dans les mémoires de l'Académie de Berlin pour 1773.

PLEV-

PLEVRONECTARVM DVPLEX SPECIES.

Descripta

a *Marco Eliefer Bloch*,

Conuent. exhib. d. 8 *Iul.* 1784.

Pleuronectes Zebra (*).

Pleuronectes oculis dextris, corpore fasciato. P. IV. Ventr. IV. A. LXIV. C. XVII. D. LXXI.

Cum pluribus naturae rerum insignibus opificiis a mercatore Amstelodamensi Vogtio emtus in manus meas delatus est piscis hic, quem maris amboinensis incolam afferebat mercator. Etsi vero indiciis eiusmodi hominum alias confidere non licet, ipsa tamen colorum varietas satis exterorum marium hospitem arguere videtur. Continetur genere Pleuronectarum, eorum quidem, quorum oculi in dextro latere apparent, si quis nempe corpus ita ante se collocauerit, vt pinna analis hominis corpus, latus conuexum et varie pictum sursum, latus vero planum et album aut decolor infra spectet; maxime ore lunulato et corpore angusto cum Pleuronecte solea conuenit,

 eique

(*) D Blochs Naturgeschichte ausländischer Fische III Theil, pag. 27 et 28. Tab. CLXXXVII.

eique ſimiles ſquamas, duras et denticulatas gerit, quae tactu aſperum faciunt. Caput pro reliquorum congenerum ratione ſatis magnum; oris apertura tamen parua eſt; maxilla ſuperior longior, vtraque dentibus acutis minutisque vallata. Oculi virideſcentes; ſuperior amplior. Branchiarum apertura ampla; membrana branchioſtega ſub operculo recondita, radiis ſex duris diſtinguitur. Linea lateralis recta per medium corpus procedit; anus capiti propinquus. Caput faſciis tribus, corpus reliquum quatuordecim transuerſim per ipſas pinnas ductis fasciis fuſcis ornatur; quarum tres ante penultimam poſitae ſuperne verſus dorſum bifurcantur; duae vltimae cum caudali faſciae lunulam referunt. Hae faſciae haud parum pulchritudinis piſci addunt, eumque nota certa atque indubitata a reliquis congeneribus, quorum oculi in dextra ſiti ſunt, diſtinguere videntur. Cui equidem nomen ab Onagro africano *Zebra* dicto ſumtum attribui propter faſciarum ſimilitudinem; neque enim a quopiam adhuc deſcriptum eſſe memini. Linnaeus equidem poſuit Pleuronectem faſciatum; verum tamen cum illi oculos ſiniſtros tribuat, pinnas vero pectorales deeſſe affirmet, credibile non eſt noſtrum piſcem ab eo indigitari. Gronouius praeterea Pleuronectem faſciatum Surinamenſem deſcripſit; ſed et illi pinnae pectorales deeſſe traduntur; igitur nec hic cum noſtro Pleuronecte vllo modo poteſt comparari.

Color corporis ſuperne flavescens verſus dorſum et ventrem in fuſcum vergit; inferne albeſcit. Pinnae pectorales, itemque ventrales parvae et tenerae; pinna dorſalis cum anali longae. Dorſalis, haud procul ab ore exorta, diſtinguitur radiis LXXI. caudalis XVII, analis LXIV, pectoralis vti et ventralis quatuor radiis componitur.

II. Pleu-

II. Pleuronectes dentatus.
Pleuronectes ore in latere posito.

Pleuronectes *dentatus*, oculis sinistris, corpore oblongo glabro dentibus exsertis. Linn. Systema Naturae p. 458. No. 13.

Posuit quidem iam dudum Linnaeus hunc eundem piscem in systemate suo; sed nimis in eo describendo breuis fuit; nec vllibi pictum eum videre memini. Operae igitur pretium facturum me esse putaui, si denuo accurate delineatum et descriptum Ichthyologis proponerem, quo melius noscerent piscem, cuius os situ singulari et dentibus a congenerum structura valde abludit. Corpus tenue, angustum, longum, ad caput rotundatum, ad caudam vero acuminatum, latere supero viridescit, infero albescit. Caput magnum, vt reliquum omne corpus; squamis denticulatis vtrinque tectum atque exinde tactu asperum. Os paruum, semilunare, non in infero corporis margine excisum, vt in reliquis Pleuronectis, sed in latere supero situm, a labio superiori lobus descendit vsque ad aperturae branchialis viciniam. Hic oris situs nota satis certa et clara piscem hunc a congeneribus separare et distinguere mihi videtur. Non minus tamen certa est illa dentium nota, quam adhibuit Linnaeus; illi enim in latere supero exterius positi os obsident. In labio inferiori octo numeraui dentes, quorum quatuor priores breues atque obtusi, posteriores vero acuti atque inflexi sunt; in labio superiori aeque atque in angulo oris dentes omnes breues et obtusi. Contra in latere infero maxillae denticulis minutis atque acutis armatae conspiciuntur, more congenerum. Labia lateris superioris desunt; in latere contra infero protuberant labia veluti soleae. Operculum branchiarum tabula vnica componitur; apertura branchiarum ampla; membrana branchiostega radiis septem fulcitur. Oculi parui, membrana nictitante obtecti; inferior iuxta maxillam positus; superior lineam lateralem fere tangit, magis tamen anterius versus caput positus. Iuxta os, ante oculum inferiorem, in vtroque latere, tam supero, quam infero, prominet papilla tubularis; ante eam foramen patet; vtraque pars odoratum atque auditum adiuvare videtur. In Pleuronecte Platessoide similiter Otho Fabricius nares duas tubulares ante interstitium oculorum longitudinaliter positas vidit (*). Lineae plures per latus ductae apparent; altera quidem superior a nucha exorta, iuxta dorsum parallela protenditur, versus pinnam caudalem vero desinit; altera inferior ab extremo capite, contra morem congenerum exorta ad caudam recta percurrit. Praeterea linea a summo dorso transuersa ad operculum branchiarum pergit; ibidem vero a linea laterali inferiori, paulo tamen anterius alia linea transuersa incipit, et per operculum versus labia oris ducta arcum efficit. Anus capiti iuxta adiacet; pinnae pectorales desunt. Pinnae ventralis radios sex, analis LXX, caudalis XVIII. dorsalis XCVIII. radios simplices et molles numeravi. Continetur hic piscis familia Pleuronectarum, quibus oculi sunt sinistri; corpore angusto, squamis denticulatis, orisque structura maxime conuenit cum Solea. Verum in latere infero cirrhum breuem nullum obseruare mihi licuit.

Habitat

(*) Faun. Groenl. p. 165.

Habitat in Carolina. Dentium argumento animalibus marinis carnivoris aſſociandus, cochleis atque oſtreis victitare videtur in fundo maris latentibus. Praedam vix niſi in latus ſuperius conuerſus rapere poſſe videtur. Denique paruulo victu contentus viuere videtur, cauitate abdominis admodum parva inſtructus, in qua cibum recondat. Linnaeus piſci huic cutem glabram et laeuem, deinde pinnas pectorales aſſignat; ventralis denique radios LXVI. numerat, et caudalem pinnam abeſſe affirmat; in quo quidem ipſe auctoritate aliena Doctoris Garden confiſus errauit vir ſummus, cum quo D. Garden in Ichthyologia haud comparandus eſſe videtur. Squamam denticulatam vnam ſeparatim pictam in eadem Tabula, paulo tamen natura maiorem, exhibui, quo melius reliquarum forma cognoſci poſſet.

MEMOIRS

MÉMOIRE
SUR L'OCCULTATION DE VÉNUS
observée le 12 Avril, 1785. N. S.

Par

M. de Lambre.

Présenté à l'Académie le 24 Janvier, 1788.

Ce phénomène s'est attiré l'attention de presque tous les astronomes. J'ai rassemblé toutes les observations qui sont venues à ma connoissance & j'en ai déduit la différence des méridiens & les erreurs des Tables. Voïci d'abord les élémens que j'ai employés dans ces calculs.

Le 11, à $23^h. 50'$. temps moyen à Paris, le lieu apparent du Soleil compté de l'équinoxe moyen par les Tables de Mayer - - - - $0^s. 22°. 56'. 8''$
Le lieu vrai corrigé de l'aberration - 0. 22. 56. 28
Mouvement horaire - - - 2. 26, 7

À $23^h. 50'$. Longitude appar. de Vénus comptée de l'équinoxe moyen & affectée de l'aberration, suivant les secondes Tables de M. de la Lande - $2^s. 6°. 24'. 53''$
une heure après - - - - 2. 6. 26. 42
Mouvement horaire géocentrique de Vénus + 1. 49

Lati-

Latitude de Vénus à $23^h. 50'$	- -	$4^\circ. 32'. 46''$ B
à 0. 50	- -	4. 32. 53
Mouvement horaire en Latitude	- -	+ 7
Parallaxe horizontale de Vénus	- -	16, 17
Demi-diamètre de Vénus	- - -	15, 56

Longitude de la Lune comptée de l'équinoxe moyen, suivant les Tables de Mayer à $23^h. 50'$.	-	$2^s. 5^\circ. 48'. 51''$
Mouvement horaire calculé	- - -	34. 43
Latitude de la Lune à $23^h. 50'$	- -	4. 51. 16, 5 B
Mouvement horaire calculé	- - - -	53, 2
Parallaxe horizontale pour Paris à $23^h. 50'$		58. 31, 1
à 0. 50		58. 28, 9
Diamètre horizontal de la Lune à 23. 50		31. 58, 4
à 0. 50		31. 57, 3
Différence de Longitude entre Vénus & la Lune à $23^h. 50'$	- - -	36. 2.
Mouvement horaire relatif.	- -	32. 54.
D'où l'on conclut la conjonction à	-	$0^h. 55'. 43''$ t.m.
ou à	-	0. 55. 6. t.v.

À $0^h. 1'. 34''$. temps vrai. M. Méchain a vu le premier contact.
à 0. 3. 6. - - - L'immersion totale de la corne boréale.
à 0. 50. 29. - - - La premiere apparition du bord.

Temps vrai des Obs.	$0^h. 1'.34''$	$0^h. 3'. 6''$	$0^h.50'.29''$
Équation du temps	+ 37	+ 37	+ 37
Temps moyen -	0. 2. 11	0. 3. 43	0. 51. 6
Temps moy. en deg.	$0^s. 0^\circ.32'.45''$	$0^s\ 0^\circ.55'.45''$	$0^s 12^\circ.46'.30''$
☉ moyen - - -	0. 21. 3. 51	0. 21. 3. 55	0. 21. 5. 51
Ascens. droite du milieu du ciel -	0. 21. 36. 36	0. 21. 59. 40	1. 3. 52. 21

Haut. du Pole à l'Obſ.	48^h.50′.14″		
Angle de la verticale	— 14. 51		
Haut. du Pole réduite	48. 35. 23		
Haut. du Nonagéſ. = h	53°.46′.30″(*)	53°.53′.30″	57°.14′.15″
Nonagéſime - - -	1^s.10. 19. 54	1^s.10. 36. 42	1^s.19. 13. 33
Long. ☾ de l'équin. m.	2. 5. 55. 54	2. 5. 56. 47	2. 6. 24. 12
Diſt. ☾ du Nonagéſ. = D	25. 36. 0	0. 25. 20. 5	17. 10. 39
Latitude vraie ☾ = l	4. 51. 4,3 B	4. 51. 3,0 B	4. 50. 22,3 B
Parallaxe horizont. ☾	58. 30,6	- - - -	58. 28,7
Celle de - - ♀	16,2	- - - -	16,2
Differ. des Parall. = p	58. 14,4	- - - -	52. 12,5
Parall. de Longitude	20. 37,6	20. 27,5	14. 42,4
Diſt. app. ☾ Nonag. = δ	25. 56. 37,6	25. 40. 32,5	17. 25. 21,4
Latitude apparente ☾	4. 19. 57,1 B	4. 20. 3,6	4. 22. 31,7 B
Latitude ♀ - - -	4. 32. 47,6 B	4. 32. 47,8	4. 32. 53,4 B
Differ. appar. de Latit.	12. 50,5	12. 44,2	10. 21,7

Mouvement apparent rélatif en Latitude
de la 1re à la 3^e obſervation 2′. 28″, 8 = F G,
de la 2de à la 3^e obſervation 2. 22. 5.

Longit. appar. ☾	2^s.6°.16′.31″,6	2^s.6°.17′.14″,5	2^s.6°.38′.54″,4
♀	2. 6. 25. 15, 1	2. 6. 25. 17, 9	2. 6. 26. 44, 0
Differ. app. Longit.	8. 43, 5	8. 3, 4	12. 10, 4

Mouvement apparent rélatif en Longitude ſur l'écliptique
de la 1re à la 3^e obſervation 20′. 53″, 9,
de la 2de à la 3^e obſervation 20. 13, 8.

Le même dans la région de la Lune
de la 1re à la 3^e obſervation 20′. 50″, 3 = L G,
de la 2de à la 3^e obſervation 20. 10, 3.

Hau-

(*) Le Nonagéſime & ſa hauteur ſont calculés avec cette hauteur du Pole réduite au centre de la Terre: par là les parallaxes dans le ſphéroïde ſe trouvent avec la même facilité que dans la ſphére.

Haut. de la ☾ d'après les parallaxes - -	49°. 57′.	- - - -	57°. 15′.
Augment. du diamet.	25″, 3	25″, 3	27″, 8
Diametre de la ☾	31′.58,	31′.58,	31′.57, 0
Diametre augmenté	32. 23, 3	32. 23, 3	32. 24, 8
Demi-diametre -	16. 11, 65	16. 11, 65	16. 12, 4
Inflexion - - -	— 3, 5	— 3, 5	— 3, 5
Demi-diametre de ♀	— 15, 56	— 12, 41 = *u*C	— 15, 56
Dist. app. des cent. obs.	16. 23, 71 = VL	15. 55, 74 = V*a*	15. 53, 34 = VF

Je vais exposer le moyen dont je me suis servi pour trouver la distance apparente des centres dans l'instant où la corne boréale a disparu. Soit V le lieu de Vénus supposée immobile pendant l'intervalle des observations. L & F le centre de la Lune à l'instant du contact pour l'immersion & l'émersion. C K la ligne des cornes de Vénus, que je prolonge jusqu'en *y* sur la ligne L F; à l'instant de l'immersion de la corne boréale C, le bord de la Lune étoit au point C. Pour trouver le lieu du centre, avec le rayon C *a* = $\frac{1}{2}$ diametre ☾ augmenté à raison de la hauteur, je détermine le point *a* sur la ligne L F, après quoi j'abaisse V *u* perpendiculairement à C *a* & j'ai *u a* sensiblement égal à V *a* ou à la distance des centres pour l'instant de l'immersion de la corne C. Tab. III. Fig. 9.

Pour l'émersion de la corne K je me sers pareillement de K Φ = $\frac{1}{2}$ diam. ☾ augmenté, & je détermine le point Φ sur L F prolongée. J'abaisse K *o* perpendiculairement, j'ai Φ *o* = Φ *k* au moins sensiblement, on aura donc Φ V en ajoutant V *o* au $\frac{1}{2}$ diam. ☾: pour avoir V *a* il falloit au contraire retrancher *u* C du demi-diametre. Soit N *b* le cercle de Latitude qui passe par le centre de Vénus, nous aurons l'angle N V C en disant:

R : sin. Latitude géocentrique de Vénus = Cotang. élongation : Cotang. ♀ V ⊙ = tang. K V ♀ = tang. de l'angle formé par la ligne des cornes & le cercle de latitude = tang. N V ☾ = tang. zVy.

Tab. III. Fig. 10.

Nous connoissons xVz = G L F, nous aurons donc aisément $xVy = xVz - zVy$; nous connoissons aussi Vx, nous aurons donc Vy, d'où Cy & Ky.

Alors dans le triangle CLy, nous aurons $Ca = \frac{1}{2}$ ☾, Cy que nous venons de trouver, & $Cya = 90° + xVy$, nous en déduirons l'angle C & uC = V C cos. C.

Dans le triangle $Ky\Phi$ nous avons Ky, $K\Phi$ & $Ky\Phi = 90° - xVy$, nous calculerons $yK\Phi = yV\Phi$ assés exactement pour notre objet. Car 1° de plus ou de moins sur l'angle V, ne change pas sensiblement Vo = V K cos. V.

Avec la premiere & la troisieme observation je trouve : GLF = 6°. 47'. 13", LF = 20'. 59", 1, Lx = 10'. 52", 88, Fx = 10'. 6", 22, VLx = 48°. 25'. 3", VFx = 50°. 30'. 54", LVA = 55°. 12'. 16", FVB = 43°. 43'. 41", VA = 9'. 21", 35, VB = 11', 28", 93.

Les mêmes quantités réduites à l'éclipt.	9'. 23", 1	11'. 31", 1
Les Parallaxes de Longitude - - -	20. 37, 6	14. 42, 4
Les différences vraies de Longitude	30. 0, 7	3. 11, 3
Les différences en temps - - - -	54. 44, 0	5. 48, 9
Les temps vrais des observations sont	0^h. 1. 34, 0	0^h. 50. 29, 0
Ainsi le temps vrai de la conjonction est	0. 56. 18, 0	ou 56. 17, 9

Les

Les différenc. appar. de Latit. sont	AL = 13'.27'',8	BF = 10'.59'',0
Les mêmes calculées ci-dessus	12. 50, 5	10. 21, 7
L'erreur des Tabl. sur la Lat. est donc	+ 37, 3	+ 37, 3

Si l'on compare les différences apparentes observées de Longitudes - -	9'.23'',1	11'.31'',1
avec celles que le calcul nous à données	8. 43, 5	12. 10, 4
On aura l'erreur des Tables en Longit.	+ 39, 6	+ 39, 3

En donnant le signe + aux erreurs des Tables, j'entens que la Lune est trop avancée soit en Longitude soit en Latitude rélativement à Vénus.

Les Tables rapprochoient donc Vénus de la Lune tant en Latitude qu'en Longitude, du moins avant la conjonction; car après la conjonction la différence de Longitudes calculée est la plus forte.

Par un calcul tout semblable fait sur la seconde & la troisieme observation, j'ai trouvé la conjonction à $0^h.56'.17'',7$; c'est à dire à $0'',3$ près la même que ci-dessus.

Voici maintenant les observations de M. Toaldo de Padoue, telles qu'elles m'ont été communiquées par M. Cagnoli.

1.)	Commencement d'immersion	$0^h.35'.7'',3$	bonne.
2.)	Immersion totale - -	0. 35. 51, 3	très bonne.
3.)	Commencement d'émersion	1. 48. 30, 3	très bonne.
4.)	Corne supérieure - -	1. 49. 1, 3	douteuse.
5.)	Corne inférieure - -	1. 49. 23, 3	bonne.

Je ne donne point les détails du calcul, en voici ſimplement les réſultats:

Obſervat.	Differ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Lat.
1 & 3 donnent	38′. 11″.	47″, 8	50″, 8
2 & 5 - -	38. 3, 4	43, 6	47, 7
2 & 3 - -	38. 7, 4	45, 4	43, 9
1 & 5 - -	38. 7, 7	46, 1	53, 5
Milieu - -	38. 7, 4	+ 45, 7	+ 49. 0

Je n'ai fait aucun uſage de la quatrieme obſervation.

Obſervations de M. le Chevalier d'Angos à Malthe, communiquées par M. de la Lande.

1.) Attouchement des limbes - $0^h. 32'. 12''$.
2.) Corne inférieure - - - 0. 32. 40.
3.) Attouchement - - - 1. 56. 18.
4.) Corne inférieure - - - 1. 56. 48.

Obſervat.	Differ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Latit.
1 & 3 donnent	49′. 21″, 5	1′. 9″, 1	15″, 2
2 & 4 - -	49. 11, 0	1. 3, 0	0, 25
1 & 4 - -	49. 22, 0	1. 9, 3	18, 5
2 & 3 - -	49. 10, 5	1. 3, 0	3, 7
Milieu - -	49. 16, 25	+ 1. 6, 1	+ 9, 4.

La différence des méridiens ſuivant M. le Chevalier d'Angos eſt ſeulement 48′. 28″. (Voyés: Éphem. de M. de la Lande T. VIII. page lxxv.) c'eſt à dire de 48″ plus foible; or l'équation du temps eſt de 37″. On pourroit donc croire que les temps donnés ci-deſſus ſont des temps moyens. En les prenant pour des temps vrais, j'ai donné 20″ de trop à la Lon-

Longitude rélative de la Lune & j'ai augmenté l'erreur des Tables. Il faudra donc la réduire & nous aurons 46″ comme par l'obſervation de Padoue. Cette conjecture très vraiſemblable n'explique pourtant pas l'erreur de la Latitude.

Obſervations de M. d'Arquier à Toulouſe, communiquées par M. de la Lande.

1.)	Vénus commence à diſparoitre -	$11^h. 42'. 38''$.
2.)	Diſparition totale - - - - -	11. 42. 53.
3.)	Elle reparoit à - - - - - - - -	0. 45. 36.
4.)	À motié ſortie - - - - - - -	0. 45. 56.
5.)	Tout à fait ſortie - - - - - -	0. 46. 24.

Réſultats.

Obſervat.	Differ. des mérid.	Erreur en Long.	Erreur en Lat.
1 & 3 donnent	$3'. 25''$	$44''$, 7	$54''$, 0
2 & 5 - -	3. 53.	30, 0	40, 8
2 & 3 - -	3. 46.	33, 7	34, 5
1 & 5 - -	3. 35.	40, 0	64, 0
Milieu - -	3. 39, 75	+ 37, 1	+ 48, 3

On fait communément la différence des méridiens entre Paris & Toulouſe de $3'. 35''$. Celles que je viens de calculer ne s'accordent pas aſſez bien entre elles pour mériter beaucoup de confiance.

M. Mougin a obſervé à la Grand-Combe des bois.

La diſparition totale à - - - - - - $0^h. 16'. 14''$.

La réapparition à - - - - - - - - 1. 17. 57.

Differ.

Différ. des mérid.	Erreur en Longit.	Erreur en Latit.
17′. 34″. orientale	+ 17″.	+ 30″.

M. de la Lande en me communiquant cette observation, m'avoit donné pour différence des méridiens 18′. 15″.

M. Romme a observé à Rochefort.

Le premier contact à - - 11ʰ. 39′. 18″.
Et l'émersion du bord éclairé à - 0. 31. 35.

J'en ai conclu

La differ. des mérid.	L'err. en Longit.	L'err. en Latit.
12′. 54″.	+ 1′. 16″.	+ 44″, 5.

Depuis que j'ai fait ces calculs, M. Méchain m'a donné la différence des méridiens 13′. 10″ dans le sphéroïde applati de $\frac{1}{230}$. D'après la Connoissance de temps de 1787, j'avois supposé 14′; par là le lieu de la Lune se trouve trop avancé de 33″ environ par rapport à Vénus: ainsi l'erreur des Tables en Longitude se réduit à 43″.

Pour la hauteur du Pole à Rochefort, ne pouvant accorder ensemble les différens auteurs que j'ai consultés, j'avois pris le parti de la déterminer par la hauteur méridienne de Vénus observée à Rochefort par M. Romme & à l'école militaire par M. d'Agelet. Cette comparaison m'avoit donné 45°. 55′. 19″. M. Méchain m'a dit depuis qu'il la trouvoit de 45°. 56′. 19″, c'est à dire plus forte de 1′. Cette inexactitude ne sauroit produire d'erreur sensible sur les parallaxes, ainsi je ne me suis pas donné la peine de recommencer mes calculs.

Obser-

Obſervations à Marſeille.

1.) Immerſion du 1er bord - - 11h. 58′. 51″.
2.) Seconde Corne - - - - 11. 59. 45
3.) Émerſion du 1er bord - - 1. 8. 51
4.) Émerſion de la ſeconde Corne 1. 9. 49.

Reſultats

Obſervations.		Différ. des méridiens	Erreur en Longitude.	Erreur en Latitude.
1 & 3	donnent - -	12′. 4″	37″	42″
2 & 4	- - -	12. 1	35	39
2 & 3	- - -	12. 2,5	36	38
	Milieu	12. 2,5	+ 36	+ 39,7

Ces obſervations ſont celles qui s'accordent le mieux avec celles de M. Méchain, l'erreur des Tables eſt la même à 1 ou 2″ près. La différence des méridiens approche auſſi de celle que l'on ſuppoſe ordinairement & qui eſt de 12′. 9″.

L'erreur des Tables qui ſe déduit des obſervations de M. Méchain tient auſſi à 1″ près le milieu entre toutes celles que j'ai concluës des autres obſervations, du moins en corrigeant celles de Malthe & de Rochefort, comme il a été dit ci-deſſus.

On peut donc regarder comme une choſe preſque ſûre que les Tables repréſentoient la Lune trop avancée de 38 à 39″ par rapport à Vénus & donnoient auſſi la Latitude trop

 forte

forte de 36 à 37″ rélativement à celle de Vénus; & comme la Latitude apparente de la Lune étoit la plus foible, l'erreur des Tables diminuoit la distance des centres.

Pour connoitre l'erreur absolue des Tables de Vénus & de la Lune, voici des observations faites par M. d'Agelet à l'école militaire.

	Passage au méridien		Distances au Zénith.
Centre de Vénus	$4^h. 13'. 47'',5$	$-7'',5$	$22°. 57'. 45'',5$
Bord de la Lune -	4. 17. 5 ,25		22. 54. 30
α des Gémeaux - -	7. 19. 31 ,5	— 7 ,5	16. 31. 48 ,5
Procyon - - -	7. 26. 43	— 5 ,5	43. 6. 10
β des Gémeaux -	7. 30. 49 ,5	— 7 ,4	20. 20. 30
β des Gémeaux le 11.	7. 30. 51 ,25	— 7 ,4	20. 20. 29 ,5

Il paroit d'après les observations de α & β des Gémeaux que les distances au Zénith sont trop fortes de 1′. 43″, 5. L'observation de Procyon donne 2′. 19″, mais je crois que cette étoile a un mouvement propre d'environ 1″ par année vers le Sud: du moins c'est ce que je trouve par la comparaison des Déclinaisons de cette étoile, telle qu'on la tire des catalogues de la Caille, Mayer & Maskelyne. Ce soupçon est encore confirmé par le témoignage de M. le Monnier, qui établit le mouvement annuel en Déclinaison de 8″, 69; (*) quoique d'après l'Ascension droite il ne dût être que de 7″, 35. Si nous adoptons le mouvement particulier de

(*) Suivant M. le Monnier (Astronomie Nautique p. 91.) le mouvement annuel en déclinaison est 9″, 8 au lieu de 7″, 40: le mouvement propre seroit donc 2″, 4.

de 1″, la correction des distances au Zénith se réduit à 1′. 44″; avec cette correction la distance vraie de Vénus au Zénith est 22°. 56′. 20″. & la Déclinaison 25°. 54′. 45″.

La pendule retarde de 1″,75 par jour; c'est à dire que la révolution des Fixes est de 23^h. 59′. 58″,25, & par un milieu entre les passages des trois étoiles je vois que les Ascensions droites en temps, données par la pendule sont trop foibles de 1′. 29″,4: ainsi l'Ascension droite de Vénus est de 4^h. 15′. 9″, 4 = 63°. 47′. 21″. De là en supposant l'obliquité de l'écliptique 23°. 28′. 13″, je conclus la Longitude Géocentrique apparente - 2^s.6°. 30′. 50″ & la Latit. 4°. 33′. 25″. B

Les secondes Tables de M. de la Lande donnent	2. 6. 30. 32 - - - -	4. 33. 8
L'erreur des Tables est donc - -	18 - - - - - - -	17
L'erreur rélat. a été trouvée ci-dessus	38 - - - - - - -	37
Le lieu calculé de la Lune doit donc être diminué de - -	20″ - - - - - -	20″

Si l'observation de la Lune au méridien eût été complete, nous aurions eu probablement une confirmation du resultat que nous venons d'obtenir. Au reste l'incertitude de l'observation ne portant que sur la Déclinaison, elle affectera principalement la Latitude, ainsi j'ai trouvé que la Longitude des Tables devoit être diminuée de 17″. Cet accord est aussi grand qu'on puisse le souhaiter.

Occultation de la 43^e étoile d'Ophiucus le 27 Avril 1785. n. s.

La Longitude de cette étoile eſt trop foible de $10'$ dans le catalogue de Bradley, en conſéquence toutes les annonces de cette occultation étoient fautives. C'eſt ce qui m'a fait manquer de quelques ſecondes l'inſtant de l'émerſion: car lors de l'immerſion la Lune n'étoit pas encore viſible pour moi. Après avoir conſtamment attendu pendant $36'$ à ma lunette ſans rien appercevoir, je quittai un inſtant pour relire l'annonce, & quand je me remis à obſerver, j'apperçus l'étoile qui venoit de ſortir de deſſous le diſque. J'eſtimai que l'émerſion avoit eu lieu 4 à $5''$ plutôt; c'eſt-à-dire à $13^h. 37'. 24''$ ou $25''$.

Voici l'obſervation de M. Méchain:

Immerſion - - - - - - - $13^h. 1'. 58''$.

un peu douteuſe à cauſe de l'ondulation du bord éclairé de la Lune.

Émerſion - - - - - - - 13. 37. 21.

Obſervation faite à Marſeille $2''\frac{1}{2}$ de temps à l'orient de l'obſervatoire de cette ville.

Immerſion douteuſe à cauſe d'un petit nuage $13^h. 10'. 40''$.

Émerſion certaine - - - - - 13. 58. 7.

J'en ai conclu la conjonction à Paris à $13^h.54'.58''$. t. v.

La différence des Méridiens — $12'. 30''$. La correction des Tables en Longitude — $6''$ & en Latitude — $33''$.

En-

Enſuite rejettant les deux immerſions comme douteuſes & retranchant 33″ de la Latitude des Tables, j'ai trouvé la différence des méridiens — 12′. 9″; (*) telle qu'on la ſuppoſe ordinairement & le temps vrai de la conjonction 13^h. 55′. 9″.

Le 11 Septembre, cette étoile fut eclipſée de nouveau. J'obſervai l'immerſion à 7^h. 5′. 1″. temps vrai de l'obſervatoire Royal: un petit nuage me cacha l'étoile environ 4′ avant l'immerſion, je la voyois par degrés perdre ſon éclat; mais quand elle diſparut pour la ſeconde fois ce fut en un inſtant: quelque attention que je fiſſe je ne pus voir le bord obſcur de la Lune.

À l'inſtant de l'émerſion la Lune qui étoit fort peu élévée, n'étoit plus viſible pour moi.

Le 11 Octobre à 8^h. 54′. 25″. temps moyen de l'obſervatoire, j'ai obſervé l'immerſion d'une petite étoile vers le milieu du diſque obſcur de la Lune. J'ai ſuivi la Lune pendant une heure ſans révoir l'étoile; alors la Lune a ceſſé d'être viſible pour moi. M. Méchain a obſervé l'immerſion à la même ſeconde.

 Les

(*) Si l'on veut la différence des méridiens pour l'obſervatoire de Marſeille, on retranchera 2″, 5 & l'on aura — 12′. 6″, 5. Or cette différence eſt de 12′, 6″, 8, au clocher des Accoules vers le milieu de la ville.

Les Tables de Mayer donnent pour le temps de l'obſervation :

Longit. app. ☾ - $9^s.24^\circ.35'.36''$. Lat. app. $2^\circ.1'.36''$.A je ne vois l'étoile dans aucun catalogue.

La 811^e de Mayer étoit en $9^s.25^\circ.22'.9''$. - $2^\circ.7'.27''$.A elle a du être éclipſée un peu plus tard: une autre l'avoit été probablement un peu plutôt. Ces trois étoiles m'ont paru de même grandeur : la 811^e de Mayer eſt marquée de la 8^e grandeur.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Methodus facilis inueniendi Integrale huius formulae:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \operatorname{cof.} \zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \operatorname{cof.} \theta + 1},$$

casu quo post integrationem ponitur vel $x = 1$ vel $x = \infty$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

La méthode que l'illustre Euler a mise en usage pour trouver l'intégrale de la formule annoncée dans le titre de ce mémoire, est celle qu'on employe ordinairement dans l'intégration de cette espèce de fractions, savoir de les transformer en fractions partielles, selon les facteurs du dénominateur, & d'intégrer chacune de ces fractions simples séparément. Mais pour peu qu'on considère avec attention la formule en question, quiconque connoît l'esprit de cette méthode, sera peutêtre surpris de la voir mise en usage pour l'intégration d'une formule aussi compliquée, & s'attendra ou à des résultats plus compliqués encore, ou, s'il en appercoît la simplicité, il s'attendra à des artifices de calcul peu communs & capables de répandre de l'intérêt sur une sujet qui en paroît d'abord peu susceptible; & c'est effectivement ce qui fait le prix de ce mémoire.

L'Auteur commence par donner à ſa formule la forme $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2 \operatorname{cof.} \zeta + x^{-p}}{x^n - 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}}$, qu'elle prend lorsqu'on diviſe le numérateur & le dénominateur par x^n, où le dénominateur eſt un produit de n facteurs ſimples trinomiaux de la forme $x^1 - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-1}$; & la forme de chaque fraction partielle qui naît de la réſolution de la fraction propoſée, devient

$$\frac{2 (\operatorname{cof.} p\,\omega - \operatorname{cof.} \zeta)}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \frac{\operatorname{fin.} \omega}{x^1 - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-1}},$$

les valeurs de l'angle ω étant au nombre de n, ſavoir: $\frac{\theta}{n}$; $\frac{\theta + 2\pi}{n}$; $\frac{\theta + 4\pi}{n}$ . . . . . $\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$. En multipliant donc chacune de ces fractions par $\frac{\partial x}{x}$, & mettant après l'intégration $x = 1$, l'intégrale de la formule propoſée devient $\frac{Q}{n \operatorname{fin.} \theta} - \frac{R \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta}$, les valeurs de Q & R étant

$$R = \frac{n\pi - \theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} + \&c.;$$

$$Q = \frac{n\pi - \theta}{n} \operatorname{cof.} \frac{p\,\theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} \operatorname{cof.} \frac{p}{n} (\theta + 2\pi) + \&c.;$$

où il eſt d'abord clair que $R = \pi - \theta$, de ſorte que tout revient à déterminer la ſomme de la ſérie Q.

Pour cet effet l'Auteur conſidère les deux ſéries ſuivantes de n termes:

$$t = \operatorname{cof.} (\alpha + 2\beta) + \operatorname{cof.} (\alpha + 4\beta) \;.\;.\;.\;.\;. + \operatorname{cof.} (\alpha + 2n\beta)$$

$$u = \operatorname{cof.} (\alpha + 2\beta) + 2 \operatorname{cof.} (\alpha + 4\beta) \;.\;.\;.\;. + n \operatorname{cof.} (\alpha + 2n\beta)$$

dont il lui eſt facile de trouver les ſommes par des transformations & combinaiſons tirées des principes de ſon calcul des ſinus. Enſuite il conſidère cette progreſſion formée des deux précédentes:

$$V = (a + b) \operatorname{cof.} (\alpha + 2\beta) + (a + 2b) \operatorname{cof.} (\alpha + 4\beta) + \;.\;.\;.\;.\;.\; + (a + nb) \operatorname{cof.} (\alpha + 2n\beta)$$

de

de manière que $V = at + bu$, ce qui, les sommes des progressions t & u étant trouvées, lui fournit la somme V. Or en comparant entre elles les progressions V & Q on peut déterminer les quantités a, b, α, β, & on parvient enfin à cette expression: $Q = \frac{\pi \text{ fin. } \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{\text{fin. } \frac{p \pi}{n}}$, de façon que l'intégrale cherchée sera pour $x = 1$:

$$\frac{\pi \text{ fin. } \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \text{ fin. } \theta \text{ fin. } \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta) \text{ cof. } \zeta}{n \text{ fin. } \theta},$$

& deux fois plus grande, lorsqu'après l'intégration on met $x = \infty$.

Il y a à faire les remarques suivantes par rapport à cette intégration.

1°.) L'exposant p doit être plus petit que l'exposant n; car autrement la fraction proposée seroit une fraction impropre: elle contiendroit des parties entières dont il faudroit chercher séparément l'intégrale & l'ajouter à l'intégrale trouvée d'après la méthode exposée ici. (Cette opération se trouve détaillée dans le mémoire suivant).

2°.) Les opérations par lesquelles on est parvenu à l'intégrale de la formule proposée, ne sauroient avoir lieu, à moins que l'exposant p ne soit un nombre entier. Cependant M. Euler fait voir que les cas où l'exposant p est une fraction quelconque, peuvent toujours être reduits à d'autres où les exposans sont des nombres entiers; & que par conséquent cette circonstance ne change rien aux résultats; mais que, quel que soit le nombre p, entier ou fractionnaire, pourvu que $p < n$, l'intégrale reste comme elle a été assignée.

 3°. On

3°.) On peut même donner à cet exposant p une valeur imaginaire, pourvu qu'elle soit telle que la formule différentielle reste réelle. Ainsi, en mettant $p = q\sqrt{-1}$, la formule à intégrer devient $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos. q\, l\, x}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$, dont l'intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est

$$\frac{\pi}{n \sin.\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi - \theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi - \theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$$

& deux fois plus grande pour les termes d'intégration $x = 0$ & $x = \infty$; vérité de laquelle, comme l'Auteur ajoute, il seroit difficile de donner une démonstration directe.

Ces remarques sont suivies de quelques autres très-propres à répandre du jour tant sur cette intégration que sur bien d'autres, & qui tendent toutes à démontrer que l'intégrale, telle qu'elle a été trouvée, est vraye, quelles que soyent les valeurs de p, n & θ, soit entieres, rompues, ou même imaginaires, les seuls cas exceptés où $p - n$ est une quantité positive & réelle.

II.

De summo usu Calculi Imaginariorum in Analysi.

Auctore *L. Eulero*, p. 25.

Les Géomètres de nos jours connoissent suffisamment la grande utilité du Calcul des Imaginaires; ils savant combien il a contribué à l'avancement de l'Analyse, & que dans l'intégration des formules différentielles fractionnaires, qui se fait par la résolution en fractions partielles ayant des dénominateurs en partie imaginaires,

ginaires, on ne sauroit se passer de ce calcul. Feu M. Euler avoit fait, à la verité, quelques tentatives de dégager l'intégration des formules rationnelles de tout emploi des Imaginaires, & quoiqu'il y aît réussi en partie, le succès n'avoit pas été parfaitement heureux dans les cas, où le dénominateur a deux ou plusieurs facteurs égaux. On ne sauroit donc se passer entièrement des Imaginaires & on rencontre parfois des formules intégrales qui paroissent se réfuser à toute voye d'intégration, à moins qu'on n'aît recours aux Imaginaires. C'est ce que l'Auteur se propose de montrer par un nouvel exemple frappant dans le cours de ce mémoire.

Le Cas que M. Euler a choisi pour cet effet lui a été fourni par le mémoire précédent. Car ayant trouvé $\frac{\pi \sin. \frac{\theta \pi}{n}}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$ pour l'intégrale de $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, il observe qu'en gardant les mêmes termes d'intégration, on peut déduire de là

$$\int \frac{\partial x}{x l x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}} = \frac{\pi}{n \sin. \theta} \int \frac{\partial p \sin. \frac{\theta \pi}{n}}{\sin. \frac{p \pi}{n}},$$

p étant regardé comme une quantité variable, & l'intégrale prise de manière qu'elle évanouisse en mettant $p = 0$. Et c'est l'intégration de cette formule, ou bien, pour éviter les fractions, de celle-ci: $\int \frac{\partial \Phi \sin. m \Phi}{\sin. n \Phi}$, qui fait le sujet de ce mémoire.

L'Auteur commence par dégager cette expression des quantités angulaires, en mettant $t = \cos. \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi$ & $u = \cos. \Phi - \sqrt{-1} \sin. \Phi$, ce qui le conduit à cette expres-

 sion

ſion purement algébrique: $\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$, pour l'intégration de laquelle il faut ſoigneuſement diſtinguer les cas où l'expoſant m ſurpaſſe n, des cas où le contraire arrive, vu que dans le premier cas la fraction eſt impropre & contient des entiers dont il faut avant tout déterminer les intégrales, ce qui étant fait, le reſte ſe reduit à trouver l'intégrale de la formule propoſée pour les cas où l'expoſant n eſt plus grand que m.

Pour cette intégration M. Euler met en uſage la méthode qu'il a employée avec ſuccès dans le mémoire precédent, ſavoir la réſolution en fractions partielles par la décompoſition du dénominateur en n facteurs ſimples trinomiaux de la forme $t^1 - 2\cos.\omega + t^{-1}$, qui donnent autant de fractions partielles à intégrer, chacune de la forme

$$-\frac{2\sin.\omega\sin.m\omega}{n\cos.n\omega} \times \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{t^1 - 2\cos.\omega + t^{-1}},$$

les n valeurs de l'angle ω étant $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \frac{i\pi}{n}$.

Mais comme l'intégration de chacune de ces fractions partielles, quoique très-facile, mène à un arc imaginaire qu'il faudroit reduire à des quantités réelles, pour s'épargner cet embarras l'Auteur fait rentrer ſon angle Φ dans le calcul, ce qui étant fait, l'intégrale partielle en queſtion, à cauſe de $\frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} = \partial\Phi$ & $t^1 + t^{-1} = 2\cos.\Phi$, prend cette forme: $-\frac{\sin.\omega\sin.m\omega}{n\cos.n\omega} \cdot \frac{\partial\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\omega}$, de façon qu'il ne reſte plus qu'à trouver l'intégrale de $\frac{\partial\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\omega}$, que M. Euler trouve d'une manière très-aiſee

$$= \frac{1}{\sin.\omega}\, l\, \frac{\sin.\frac{1}{2}(\omega + \Phi)}{\sin.\frac{1}{2}(\omega - \Phi)}.$$

La

La forme générale des intégrales partielles qui composent l'intégrale complette de la formule proposée sera donc

$$-\frac{\text{fin. } m\,\omega}{n \text{ cof. } n\,\omega}\, l\, \frac{\text{fin. } \frac{1}{2}(\omega + \phi)}{\text{fin. } \frac{1}{2}(\omega - \phi)},$$

ou bien, ce qui revient au même, en mettant $\frac{\pi}{n} = 2\alpha$ & $\phi = 2\psi$, on aura

$$\int \frac{2\,\partial\psi \text{ fin. } 2\,m\,\psi}{n \text{ fin. } 2\,n\,\psi} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{fin. } 2\,m\,\alpha}{n}\, l\, \frac{\text{fin. } (\alpha + \psi)}{\text{fin. } (\alpha - \psi)} \\ - \frac{\text{fin. } 4\,m\,\alpha}{n}\, l\, \frac{\text{fin. } (2\alpha + \psi)}{\text{fin. } (2\alpha - \psi)} \\ + \frac{\text{fin. } 6\,m\,\alpha}{n}\, l\, \frac{\text{fin. } (3\alpha + \psi)}{\text{fin. } (3\alpha - \psi)} \end{array} \right\} \text{\&c.}$$

où le nombre des termes est $n - 1$ & $\psi < \alpha$.

Ayant donc trouvé une expression finie pour l'intégrale de $\frac{\partial p \text{ fin. } \frac{\theta p}{n}}{\text{fin. } \frac{\pi p}{n}}$, on pourra aussi assigner, par une expression finie, l'intégrale de la formule $\int \frac{\partial x}{x\, l\, x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}}$, toutes les fois que l'angle θ est à π dans un rapport rationnel, c'est à dire $\theta : \pi = \mu : \nu$, ou bien $\nu = \frac{\mu\,\pi}{\theta}$. En mettant donc $\frac{p}{n} = r$ & $\frac{\pi}{2\nu} = \varrho$, la forme générale de toutes les parties dont l'intégrale de la formule proposee est composée, sera $\pm \frac{\text{fin. } i\,\theta}{\text{fin. } \theta}\, l\, \frac{\text{fin. } \varrho\,(i + r)}{\text{fin. } \varrho\,(i - r)}$. Mais comme de cette manière le nombre des termes peut être reduit à la moitié, pour faciliter cette contraction l'Auteur distingue quatre cas, selon que les nombres μ & ν sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, & il finit son mémoire par quelques exemples propres à éclaircir cette intégration remarquable.

III.

III.
Specimen ſingulare Analyſeos Infinitorum indeterminatae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

Parmi le grand nombre de découvertes dont les ſciences mathématiques ſont redevables à l'immortel Euler, la méthode de réſoudre, par une voye directe, des Problèmes de l'Analyſe infinitéſimale analogues à ceux que la méthode de Diophante enſeigne à réſoudre dans l'Algèbre, ne tient pas la derniere place. Les Géomètres ſavent quelle grande ſenſation a faite, en ſon tems, le Problème propoſé & réſolu par Hermann, de trouver une courbe algébrique non-rectifiable, mais dout la rectification dépende de la quadrature d'une courbe donnée, douée de tant qu'on voudroit d'arcs rectifiables; ils ſavent que feu M. Euler a été le premier à réſoudre ce Problème d'une manière directe dans un mémoire intitulé: *De methodo Diophanteae analoga in Analyſi Infinitorum*, qu'on trouve dans le Tome cinquième des nouveaux Commentaires de notre Académie, & dans lequel il a jetté les premiers fondemens de ce nouveau Calcul & expoſé la ſolution de quantité de Problèmes relatifs à cette méthode & réſolus directement par le moyen de ſes nouveaux principes.

Cependant le Problème le plus général qu'on peut réſoudre par le moyen de cette nouvelle méthode, c'eſt de trouver une telle relation algébrique entre les deux quantités variables x & y, que toutes ces formules intégrales: $\int P\,\partial y$, $\int Q\,\partial y$, $\int R\,\partial y$, &c. obtiennent des valeurs algébriques, & qu'une ou deux d'entr'elles renferment des quadratures données, les lettres P, Q, R marquant des fonctions quelconques don-

données de x. Mais quoique ce cas paroisse être d'une grande généralité: il est restreint par la condition que la variable y ne doit avoir, dans ces formules, qu'une seule dimension; & toutes les fois que le Problème indéterminé qu'on traite n'est pas réductible à de pareilles formules, la méthode de M. Euler, exposée dans le mémoire cité, est insuffisante; & il avoue ici lui même qu'il ne voit pas comment tenter seulement la solution des cas qui ne sont pas contenus dans les formules mentionnées. Il en allègue pour exemple les deux formules si simples $\int \frac{y \partial x}{x}$ & $\int \frac{\partial x}{y x}$, dont on ne voit pas comment trouver l'intégrale, à moins qu'on ne prenne pour y une puissance quelconque de x, quoi qu'il y ait lieu de présumer que ce ne soit pas la seule solution possible.

La perfection de ce genre de calcul paroît donc promettre une riche recolte de vérités nouvelles & de nouveaux moyens de résoudre plusieurs Problèmes qui jusqu'ici se sont refusés à tous les efforts des Géomètres. C'est de là que dépend, par exemple, la démonstration complette des deux Théorèmes, dont feu M. Euler avoit tâché de montrer la vérité dans ses Opuscules Analytiques T. II. page 82 & suiv. savoir: 1°.) Qu'à l'exception du cercle il n'y ait point de courbe algébrique dont chaque arc puisse être exprimé par un arc de cercle; & 2.) Qu'il n'y ait point de courbe algébrique dont les arcs puissent être exprimés simplement par des logarithmes. De même la recherche des lignes rectifiables tirées sur une surface courbe donnée, soit convexe ou concave, est sujette à de grandes difficultés qu'on ne surmontera apparemment jamais sans le secours de ce nouveau genre de calcul mieux perfectionné, c'est pourquoi l'Auteur invite tous les Geomètres à s'appliquer à cette partie de l'Analyse.

La ſolution du Problème qui fait le ſujet du préſent mémoire eſt très propre à repandre quelque jour ſur ce genre ténébreux de calcul, quoi qu'elle ſoit extrèmement indirecte. Il s'agit de trouver une telle relation entre les variables q & z, que la formule $\int q\,\partial z$ devienne algébrique, & que la formule $\int\frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z}$ exprime un arc de cercle. Comme la dernière condition eſt la plus difficile à remplir, l'Auteur commence par là, en mettant $\int\frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z}=\text{A tang.}\,\frac{x}{y}$, d'où, en prenant les différentielles & mettant $xx+yy=zz$, il déduit $\sqrt{(qq-1)}=\frac{y\,\partial x-x\,\partial y}{x\,\partial x+y\,\partial y}$ & $q=\frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, où $p=\frac{\partial y}{\partial x}$. De cette manière les deux quantités variables q & z ſont déterminées par deux autres x & y, & la dernière condition eſt remplie. Pour ſatisfaire à l'autre condition, comme $q\,\partial z=\partial x\sqrt{(1+pp)}$ & $\partial y=p\,\partial x$, tout ſe reduit à rendre algébriques ces deux formules: $y=\int p\,\partial x$ & $\int q\,\partial z=\int\partial x\sqrt{(1+pp)}$. Or

$$\int p\,\partial x=px-\int x\,\partial p;$$
$$\int\partial x\sqrt{(1+pp)}=x\sqrt{(1+pp)}-\int\frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+pp}};$$

où les deux dernières formules ſont contenues dans celles que M. Euler a enſeigné à rendre algébriques dans le Problème général dont nous avons fait mention. Cependant il donne ici une double ſolution de ces deux formules, l'une par les irrationnelles, l'autre par des expreſſions dégagées de l'irrationalité.

Quoique cette méthode de réſoudre le Problème ſoit très indirecte, & due uniquement à la circonſtance que la ſolution en étoit déjà connue d'avance: elle peut neanmoins donner aux Géomètres l'occaſion de perfectionner ce nouveau genre de calcul ſi propre a reculer les bornes de l'Analyſe & c'eſt dans cette eſpérance principalement que M. Euler à communiqué cette ſolution.

IV.

IV.

De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroïdica quacunque geometrice ducendis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 57.

Comme sur la surface du cylindre, le plus simple des corps terminés par des surfaces courbes, on ne peut tirer aucune ligne rectifiable, à l'exception de la droite parallèle à l'axe, on dévroit croire qu'à plus forte raison il seroit impossible de tirer sur la surface du cone des courbes dont tous les arcs pussent être exprimés algébriquement. Neanmoins M. Euler a montré, dans un mémoire: *De curuis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis* (Acta Acad. Sc. pro Anno 1781. P. I.) que sur la surface des cones droits, dont les côtés sont au diamètre de la base dans un rapport rationel, on peut tirer une infinité de lignes rectifiables.

De même, malgré tous les efforts des Géomètres, sans en excepter la derniere tentative de M. Euler: *De curua rectificabili in superficie sphaerica* (Nou. Comment. T. XV.) on n'a pu découvrir jusqu'ici d'autres lignes rectifiables tirées sur la Sphère que la seule Epicycloïde engendrée par le mouvement d'un grand cercle sur un petit cercle de la Sphère, dont le rayon est au rayon de la Sphère dans un rapport rationel. On devroit donc croire qu'il seroit encore plus difficile de trouver une ligne rectifiable sur la surface d'un Sphéroïde, vu que les arcs elliptiques paroissent devoir mettre obstacle à cette recherche. Cependant l'Auteur de ce mémoire a trouvé un Théorème, moyennant lequel la solution du Problème pour la Sphère devient non-seulement très-plane & très-facile; mais qui l'a mis auſſi en état de trouver ſur la ſurface d'un Sphéroïde quelconque des lignes rectifiables.

Le Théorème qui a rendu à M. Euler ce grand ſervice eſt que, ſi v marque une fonction quelconque de l'angle Φ, que fait la normale d'une courbe avec ſon axe des abſciſſes, & dont l'élément de l'arc eſt

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \partial\,.\,\frac{\partial v}{\partial \Phi},$$

les ordonnées de la courbe puiſſent être exprimées de cette manière :

$$x = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\Phi;$$
$$y = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{coſ.}\,\Phi + v\,\text{ſin.}\,\Phi;$$

de façon que, ſi v fût une fonction algébrique, pas de l'angle Φ, mais de ſa tangente t, les ordonnées x & y ſeroient exprimées par des fonctions algébriques de t & partant la courbe algébrique & même rectifiable. À l'aide de ce Théorème, muni d'une démonſtration très-élégente, il eſt aiſé d'aſſigner une infinité de courbes algébriques non-ſeulement rectifiables, mais dont la rectification dépend d'une quadrature donnée.

Après avoir donné ce Théorème, M. Euler procède à la ſolution du Problème de trouver des lignes rectifiables ſur la ſurface d'un Sphéroïde dont l'axe eſt à l'Équateur comme $c : 1$; & comme l'élément d'une ligne tirée ſur la ſurface de ce Sphéroïde eſt $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$, x, y & z étant les trois ordonnées : il eſt clair que tout ſe reduit à trouver une telle relation entre x & y, que cette expreſſion devienne intégrable. Mais comme il eſt impoſſible d'effectuer cela en général, l'Auteur ſe borne à un cas particulier, en mettant

$s = nz$,

$s = n z$, & à l'aide de cette réſtriction & du Théorème mentionné il parvient à trouver des lignes rectifiables qu'on peut tirer ſur la ſurface d'un Sphéroïde & qui ont la propriété que leur projection faite ſur le plan de l'Équateur eſt la même, ſoit que le Sphéroïde ſoit applâti ou allongé ; de ſorte que cette ſolution ne diffère en rien de celle qu'on a donné pour la ſurface de la Sphère, & que, puisque la lettre c qui détermine l'eſpèce du Sphéroïde elliptique, ſort du calcul, cette ſolution a auſſi lieu pour les ſurfaces des Conoïdes hyperboliques.

V.

De ſuperficie coni ſcaleni, vbi imprimis ingentes difficultates, quae in hac inueſtigatione occurrunt, perpenduntur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 69.

Le titre de ce mémoire annonce aſſez clairement ce qu'on y doit attendre: une expoſition des difficultés, dont ce ſujet, traité avec peu de ſuccès par pluſieurs Géomètres, eſt enveloppé, plutôt qu'une ſolution complette & ſatisfaiſante de ce Problème. En nommant la hauteur du cone a, ſon obliquité, ou bien la diſtance du centre à la perpendiculaire tirée du ſommet ſur le plan prolongé de la baſe $= b$, le rayon de la baſe $= c$ & la ſurface d'une portion infiniment-petite de la ſurface du cone compriſe entre un arc de la baſe $c \partial \Phi$ & les deux côtés du cone $= \partial S$, cette ſurface eſt exprimée ainſi: $\partial S = \frac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{a a + (c + b \cos. \Phi)^2}$, comme on ſait par le mémoire de feu M. Euler: *De ſuperficie conorum ſcalenorum aliorumque corporum conicorum*, qui ſe trouve dans le premier volume des Nouveaux Commentaires, où le Problème eſt reduit à la même expreſſion. Mais ayant reduit alors la ſurface du cone à la rectification d'une courbe algébrique du ſixième degré, il employe ici la voye de l'approximation, en transformant l'expreſſion irrationelle en ſérie. Il met, pour cet effet $aa + \frac{1}{2}bb + cc = ff$ & $2bc \operatorname{cof.} \Phi + \frac{1}{2}bb \operatorname{cof.} 2\Phi = v$, de façon que $\partial S = \frac{1}{2} c \, \partial \Phi \sqrt{ff + v}$ &

$$\sqrt{ff + v} = f + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{v}{f} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{vv}{f^3} + \&c.$$

& il aſſigne la valeur de la ſurface S pour les deux, trois & quatre premiers termes de cette ſérie, où la dernière expreſſion, compoſée des quatre premiers termes, eſt aſſez approchante, pourvu que f ſoit conſidérablement plus grand que b & c.

Une autre approximation déduite de la transformation du radical $\sqrt{aa + (c + b \operatorname{cof.} \Phi)^2}$ en ſérie, donne une loi de progreſſion plus manifeſte. L'Auteur ne la pouſſe cependant que jusqu'à la ſomme de quatre termes; mais il fait voir comment on peut la pouſſer plus loin, & il donne à la fin de ſon mémoire cette expreſſion pour la ſurface entière du cone: $\pi aaxu . V$, où $x = \frac{c}{a}$ & $u = \sqrt{1 + xx}$ & V une ſérie dont la loi de progreſſion eſt évidente, mais qui n'eſt d'aucun uſage lorsque l'obliquité du cone n'eſt pas très-petite en comparaiſon de la hauteur du cone & du rayon de ſa baſe.

Une grande difficulté ſe préſente lorsqu'on cherche la ſurface d'un cone oblique dont la hauteur eſt très-petite. Car alors la ſérie qui exprime le radical $\sqrt{aa + (c + b \operatorname{cof.} \Phi)^2}$, devient

$$c + b \operatorname{cof.} \Phi + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{aa}{c + b \operatorname{cof.} \Phi} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{a^4}{(c + b \operatorname{cof.} \Phi)^3} + \&c.$$

&

& cette férie eft très-convergente, lorsque la hauteur a eft très-petite par rapport à $c + b$ cof. Φ; mais comme parmi les valeurs de l'angle Φ, il y en a où cof. $\Phi = -\frac{c}{b}$, & partant $c + b$ cof. $\Phi = 0$, tous les termes après le premier deviennent infiniment grands & s'écartent par conféquent enormément de la vérité, inconvenient que l'Analyfe n'a pas encore réuffi à lever. Dans tous ces cas il faudra donc recourir à la dimenfion pratique, en partageant toute la furface du cone en plufieurs parties, & chercher la furface de chacune féparément.

Pour faciliter cette opération l'Auteur cherche la figure qui nait du développement de la furface du cone en furface plane, ce qui le mène à une courbe tranfcendante qu'on ne peut exprimer ni par des logarithmes, ni par des arcs de cercle, mais dont neanmoins M. Euler eft en état d'affigner quelques propriétés remarquables. D'ailleurs comme elle peut être repréfentée par le développement d'un papier appliqué à la furface du cone, elle fournit un nouvel exemple d'une courbe hyperfcendante dont la conftruction mécanique eft très-facile.

VI.

De proprietatibus quibusdam Ellipfeos in fuperficie fphaerica defcriptae.

Auctore *Nicolao Fufs*, pag. 90.

Ce mémoire eft en quelque façon une fuite de celui que le même Auteur a donné dans le fecond Tome des nouveaux Actes de l'Académie fous le titre: *Problematum quorundam*

dam ſphaericorum Solutio, où l'on trouve entre autres le Problème de conſtruire, ſur un arc de grand cercle de la Sphère donné, un triangle dont le ſommet ſe trouve dans un autre grand cercle & dont la ſomme des deux côtés ſoit un Minimum. Ce Problème avoit dejà donné alors à M. Fuſs l'idée de réſoudre une autre queſtion analogue, ſavoir de conſtruire ſur une baſe donnée un triangle tel que la ſomme des deux autres côtés ſoit conſtante. Mais comme cette recherche lui avoit d'abord fournie différentes propriétés analogues à des propriétés de l'Ellipſe plane, il a trouvé plus convenable de traiter ce ſujet apart.

Il ſuppoſe donc ici qu'un fil dont la longueur $= 2c$ ſoit fixé par ſes deux extrémités dans deux points de la ſurface ſphérique diſtans, l'un de l'autre, d'un arc de grand cercle $= 2a$; & qu'en tendant ce fil par le moyen d'un ſtile, on décrive ſur la Sphère, par un mouvement continu du ſtile, une ligne courbe, tout comme on décrit l'Ellipſe ſur le plan. En prenant les abſciſſes de cette courbe ſur le grand cercle paſſant par les points où les extrémités du fil ſont attachées & du milieu de ces deux points, ſi l'on nomme l'abſciſſe x & l'ordonnée y, on parvient par le moyen de quelques transformations & reductions aſſez connues dans le calcul des ſinus, à cette équation:

$$\text{tang.}\, y = \frac{\sqrt{(\text{ſin.}\, c^2 - \text{ſin.}\, a^2)(\text{ſin.}\, c^2 - \text{ſin.}\, x^2)}}{\text{ſin.}\, c \,\text{coſ.}\, c}.$$

L'application de cette expreſſion à un cas particulier, où la longueur du fil eſt égale à la demi-circonférence de la Sphère, mène à des concluſions qui, au premier coup d'oeil, paroiſſent difficiles à concilier avec la nature du Problème; mais l'Auteur en diſſipe les doutes & déduit de cette conſidé-

ration

ration une propriété remarquable, ſavoir que, ſi la longueur du fil eſt la moitié de la circonférence de la Sphère, quelle que ſoit la diſtance des deux points où ſes extrémités ſont fixées, la courbe décrite par le mouvement du ſtile eſt toujours un grand cercle de la Sphère.

Au reſte, en déſignant par la lettre g le demi-axe conjugé de cette Ellipſe ſphèrique, l'équation qui en exprime la nature devient $\text{tang.}\, y = \frac{\text{tang.}\, g}{\text{ſin.}\, c} \sqrt{(\text{ſin.}\, c^2 - \text{ſin.}\, x^2)}$.

Pour mieux approfondir la nature de cette courbe, l'Auteur en examine la projection faite ſur le plan du grand cercle dont le centre de l'Ellipſe ſphérique eſt le pole, projection qui eſt une véritable Ellipſe, ſon équation étant

$$Y = \frac{G}{C} \sqrt{(CC - XX)},$$

où G marque le demi-axe conjugué, C le demi-axe traverſant, X l'abſciſſe priſe du centre & Y l'ordonnée, équation dont la liaiſon avec celle de l'Ellipſe ſphérique eſt évidente.

VII.

Annotationes ad Theorema XVI. Lib. V. Pappi Alexandrini.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 100.

Les ouvrages de *Pappe d'Alexandrie*, qui ſont parvenus jusqu'à nos jours, contiennent la plupart des matieres, qui ne ſemblent guéres propres qu'à la méthode analytique; ce qui l'a empeché d'étendre ſes recherches auſſi loin qu'il l'auroit pu faire, s'il n'y eut pas employé la méthode géométrico-ſynthétique, comme tous les anciens Géométres. Comme cela a deja souvent donné lieu aux Géométres modernes d'appliquer la méthode analytique à des sujets, que *Pappe* avoit traités synthétiquement; l'auteur de ce mémoire l'a aussi essayé sur la proposition de ce Géométre: „ *que parmi toutes les aires circulaires de la même circonference celle est la plus grande, qui appartient à un demi-cercle:* " Il a trouvé par le calcul, qu'en nommant ϕ la moitié de l'angle repondant aux arcs d'une égale circonférence, l'aire comprise entre cet arc & les rayons sera un *maximum*, si $\cos. \phi = 0$, c'est à dire, si ϕ est égale à un terme quiconque de cette serie: $90°$, $270°$, $450°$, &c. & un *minimum*, si l'angle ϕ est égal à sa tangente, consequemment si $\phi = 0$; $\phi = 257°. 27'. 12''. 13'''$; $\phi = 442°. 37'. 27''. 32'''.$, &c. mais que dans le premier cas, parmi tous les termes de la serie le premier $\frac{1}{2}\pi$ donne la plus grande aire (& c'est ce justement qu'a démontré *Pappe*); & que dans le second cas, hormis le premier terme $\phi = 0$, où l'aire s'évanouit de même, les aires deviennent d'autant plus petites que l'angle ϕ s'augmente.

L'Auteur a encore étendu le calcul à quelques autres cas. La superficie d'un segment sphèrique étant constante, l'hémisphère est le plus grand de tous les segmens. Si l'on pose constante la base d'un cone perpendiculaire, la superficie de celui-ci croit à l'infini avec la hauteur du cone; mais le cone lui-même devient un *maximum*, si la hauteur est égale au rayon de la base multiplié par $\sqrt{2}$, c'est à dire, si les côtés du cone sont inclinés à la base sous l'angle $54°. 44'...$, angle d'ailleurs très-remarquable dans les Mathématiques.

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

De viribus centripetis, ad curuas non in eodem plano ſitas deſcribendas, requiſitis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 111.

Le grand Newton a été le premier, comme on ſait, qui ait réſolu le problème, dans lequel on cherche la force centripète, tendante vers un point fixe donné, propre à faire décrire à un corps telle ligne courbe donnée. Mais comme dans l'énoncé de ce Problème on admet tacitement, & que même la nature de la choſe porte néceſſairement, que toute la courbe ſoit ſituée dans un même plan avec le centre de force, qu'on cherche; il s'en ſuit, que ſi la courbe décrite étoit à double courbure, ce mouvement ne pourroit pas provenir d'une ſeule force centripète, & qu'il faudroit ſtatuer au moins deux centres de forces différens. L'Auteur montre donc dans ce Mémoire, que quelle que ſoit la courbe décrite, ces deux centres de forces peuvent toujours être pris à volonté, & que delà on déterminera les deux forces centripètes, requiſes, pour faire parcourir au corps la courbe propoſée.

En effet, puiſqu'en décompoſant le mouvement du corps en trois autres, parallèles aux trois axes pris à volonté pour les coordonnées de la courbe, on en déduit d'après la métho-

méthode ordinaire trois équations pour les trois forces accélératrices requiſes; on tirera de ces équations les deux forces centripètes, qu'on cherche, & la viteſſe du corps dans chaque point de la courbe. Cette ſolution au reſte devient beaucoup plus ſimple & plus aiſée, en faiſant paſſer l'axe des abſciſſes par les centres de forces mêmes, & en prenant le commencement des abſciſſes à des diſtances égales de ces centres. Pour mettre enſuite cette matière dans un plus grand jour, il applique dans quelques Problèmes cette ſolution à différens exemples. Dans le premier il ſuppoſe que le corps ſe meuve ſur la ſurface d'un cylindre, & qu'on prenne les deux centres dans l'axe du cylindre; dans le ſecond il fait mouvoir le corps dans la ſurface d'une ſphère, dont les poles faſſent les deux centres de forces, & ici il dévéloppe encore particuliérement le cas, où la courbe décrite ſera la Loxodromique. Dans ces problèmes notre Auteur cherche donc toûjours tant les forces centripètes, que la viteſſe trajectoire du corps.

II.
De Motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſuper eadem linea recta.

Auctore *L. Eulero*, pag. 126.

Comme c'eſt le cas le plus ſimple du fameux Problème des trois Corps, quand les Corps ſont tous ſitués dans la même ligne droite, notre illuſtre Auteur le dévéloppe avec ſoin dans ce Mémoire; il peſe toutes les difficultés, qui empêchent, qu'on ne le puiſſe réſoudre, & il fait voir parlà, combien de progrés on a beſoin de faire encore dans l'Analyſe, avant que d'oſer entreprendre la ſolution de ce Problème, pris dans toute ſa généralité.

On

On voit d'abord que la ſolution Phyſique du Problème n'a pas la moindre difficulté, & les trois équations differentielles requiſes pour le mouvement des trois corps ſe préſentent pour ainſi dire d'elles mêmes; mais l'Auteur avertit, que le mouvement contenu dans ces formules ne durera pas plus long-tems, que jusqu'à ce que deux de ces corps ſeront venus à s'entrechoquer, & qu'alors le mouvement continuera d'après des loix différentes, ſuivant que les corps ſeront plus ou moins mous ou élaſtiques.

Au reſte quoique chacune des trois équations differentielles ne ſoit pas intégrable par elle-même, M. Euler parvient cependant par une combinaiſon aſſés facile à une équation en termes finis, qui fait connoitre, que le commun centre de gravité des trois corps avancera d'un mouvement uniforme ſur la ligne droite, qui les enfile: & par une autre combinaiſon il trouve encore une équation, qu'on peut intégrer une fois, & qui renferme le principe fécond des forces vives, ou celui de la moindre action. Enſuite notre Auteur déploye ſa ſagacité ordinaire à réduire les variables à un plus petit nombre & à trouver des équations conciſes & élégantes, toutes cependant de nature à n'entrevoir aucun moyen de les intégrer. Comme la principale cauſe de ces difficultés paroit naitre de ce que le Problème eſt eucore trop général en admettant des corps, dont la maſſe & la viteſſe ſoyent dans un rapport quelconque, M. Euler s'arrète à un cas particulier, qui permet une ſolution parfaite, ſavoir quand les deux diſtances entre les trois corps gardent toùjours un rapport donné & conſtant entre elles, & il montre qu'on peut déterminer les maſſes des corps de manière, que ce rapport des diſtances ait lieu. La ſeule difficulté conſiſte à trouver la racine d'une équation du cinquiéme dégré. Il finit enſuite par la conſidération

 d'un

d'un autre cas particulier, où la masse d'un des corps seroit infiniment petite, & il fait voir, que toutes les ressources connues du calcul sont encore insuffisantes pour résoudre l'équation, qui en resulte, & qu'elles resteroient meme insuffisantes, si l'on vouloit la simplifier encore d'avantage, en supposant la distance initiale de deux de ces corps infinie.

III.

Solutio Problematis Mechanici.

Auctore *L. Eulero*, pag. 142.

M. Euler considère ici deux cylindres parallèles entre eux, sur un plan horizontal, avec un fil, qui les enveloppe, en passant au-dessous de l'un, & au-dessus de l'autre: il suppose, que chacun de ces cylindres soit réprésenté par la section circulaire d'un plan, qui le coupe, & que ces deux sections avec le fil soyent situées dans un même plan vertical. On demande quelles lois suivra le mouvement de ces cylindres, si l'on donne un choc à l'un d'eux, ou à tous les deux à la fois? Aprés avoir trouvé les cinq équations nécessaires, qui renferment les six variables, que le Problème exige, l'Auteur parvient moyennant des substitutions ingénieuses, à démêler toutes ces variables de maniére, qu'il ne reste qu'une équation aux prémiéres différences assés simple, & où les variables sont séparées; si donc l'on accorde l'intégration de cette équation, toutes les autres variables se détermineront sans qu'il reste de difficulté, & le mouvement des cylindres sera connu.

IV.

IV.

Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible.

Par M. *Jacques Bernoulli.*

Troiſiéme Mémoire. Page 149.

Ce ſeroit une répétition inutile, que de faire un extrait de ce Mémoire, puisque ceux mêmes, qui ne voudroient pas ſe donner la peine de le lire en entier, trouveront dans l'introduction & dans les deux derniers paragraphes tout ce qui peut ſuffire à leur en faire connoitre l'objet & les réſultats.

V.

Raccourci des élémens dioptriques, qui ſervent de baſe à la théorie des objectifs achromatiques applicables aux Microſcopes.

Par M. *W. L. Krafft.* Page 162.

Le but, que l'auteur ſe propoſe dans ce Mémoire, eſt de déduire d'un ſeul principe général, de démontrer de la maniere la plus ſimple & de préſenter dans leur rapprochement les élémens, qui ſervent de *baſe* à la théorie des objectifs achromatiques, ſans les reſtreindre à l'hypothéſe d'un objet infiniment éloigné, afin qu'ils puiſſent dans la ſuite être employés à des recherches ſur les objectifs achromatiques & des appareils oculaires applicables aux Microſcopes. Le principe général, que l'auteur met pour baſe, exprime l'obliquité ſous laquelle l'axe d'une lentille eſt coupé par le rayon refracté, ainſi que

que la distance du point de leur intersection à la derniere surface refringente, & pour que ces formules soient applicables à un point *quelconque* de l'objet, il répréfente la position du point lumineux comme par deux coordonnées, dont l'une en détermine la distance horisontale à la lentille, l'autre la hauteur verticale au dessus de l'axe de la lentille. Après avoir démontré ces formules générales, il en fait trois applications spéciales. D'abord il accommode ses formules aux rayons *infiniment proches de l'axe* de la lentille; & comme l'ouverture de la premiere surface refringente entre comme élément dans ces formules, il ne lui faut pour cet effet, que la supposer infiniment petite. Les ayant accommodées à ce cas là, il en tire la position & le demidiamètre de l'image formée derriere la lentille, en les appliquant aux rayons qui partent du *centre* de l'objet ainsi qu'à ceux qui partent de son *extrèmité*, & pour cet effet il n'a fallu que donner les valeurs respectives aux deux coordonnées, qui déterminent la position du point lumineux. Cela étant établi: l'Auteur détermine pour un nombre quelconque de lentilles placées sur un axe commun à certaines distances les unes des autres les dix suivans élémens dioptriques. 1.) La distance de chaque image aux deux lentilles, entre lesquelles elle se trouve placée. 2.) La route du rayon passant du centre de l'objet par l'extremité de l'ouverture infiniment petite de la premiere surface refringente. 3.) Les demidiamètres des images principales. 4.) Les distances des points d'intersection de l'axe avec le rayon passant de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille. 5.) Les obliquités de ces intersections. 6.) Les demidiamètres des ouvertures dues à la route de ce rayon. 7.) Le demidiamètre du champ apparent. 8.) La juste distance de l'oeil derriere la lentille, dûe au champ apparent. 9.) Le grossissement & 10.) le degré de clarté de la vision. La seconde appli-

application, que l'auteur fait de ſes formules générales, eſt de les accommoder aux rayons qui s'*écartent de l'axe* de la lentille. Il ſuppoſe pour cet effet à l'objectif une ouverture finie, telle cependant qu'on puiſſe negliger ſans erreur ſenſible les puiſſances plus hautes, que le cube du ſinus de l'angle de l'écartement des rayons. Ayant développé en conſequence ſes formules, il obtient pour la diſtance de l'image à la lentille une expreſſion en deux termes, dont le premier marque la diſtance de l'image *principale*, & le ſecond l'*aberration cauſée par la ſphéricité de la lentille*. Le même procédé ſert avec la même facilité à déterminer l'aberration cauſée par un nombre quelconque de lentilles ſpheriques. La troiſieme application de ces formules ſe fait aux rayons *differemment colorés* & à la recherche de l'aberration cauſée par leur differente refrangibilité. Pour les accommoder à la détermination de la route des rayons *extremes*, l'auteur fait varier dans ces formules la quantité, qui exprime la loi de la refraction des rayons *moyens* & recherche les variations, qui en reſultent dans les valeurs des formules generales, qui repréſentent la diſtance de l'image principale & l'obliquité du rayon refracté; d'ou il obtient l'aberration *longitudinale* & *angulaire* cauſée par la variabilité de la loi de refraction, ainſi que les équations, auxquelles il faudroit ſatisfaire pour aneantir cette eſpece d'aberration, c'eſt-à-dire, pour rendre les objectifs achromatiques.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De Ordine fibrarum muscularium cordis. Dissertatio VI. Pars posterior: Ventriculus sinister.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 185.

L'Auteur continue de considerer les variétés, qui se trouvent dans la structure des fibres externes du coeur, pour en constater la structure essentielle. Il parcourt dans cette seconde partie du sixieme mémoire les fibres du ventricule gauche, après avoir consideré celles du ventricule droit dans la premiere partie du même mémoire. Mais comme les fibres externes de celui-là sont beaucoup plus simples dans leur division, leur origine, leur progression & insertion, il ne s'est presque rien trouvé dans la premiere déscription de ces fibres, qui ne soit universel & constant. Cependant dans ces nouvelles recherches l'Auteur a trouvé plusieurs choses remarquables, qu'il n'avoit pas observées dans les premiers coeurs, & qu'il ajoute à présent à la déscription. Tels sont ces faisceaux musculaires, nommés par l'Auteur *terminaux*, qui par leur action, s'ils sont bien forts, produisent la double pointe du coeur, dont il est déja fait mention dans la premiere partie de ce mémoire. Encore que le coeur ne soit pas constamment pourvû de ces deux pointes distinctes, dont l'une appartient au ventricule droit, l'autre au gauche; les faisceaux eux-mêmes néanmoins sont bien constans, mais ils varient à l'égard de leur grandeur & de leur nombre. L'Auteur en a trouvé deux ou ou trois; il les a vûs bien forts, comme dans ce coeur, dont la figure eſt ajoutée à ce mémoire, & il les a vu auſſi très minces, comme s'ils n'étoient que trois fibres plus groſſes qu'à l'ordinaire. Mais jamais ils n'y manquent, & toujours ils prennent leur origine à la ſurface inférieure, vont de là par le milieu de la pointe du coeur & s'inſerent d'une maniere déterminée dans la ſurface ſupérieure. Leur eſſentiel eſt de donner un point ferme au ſecond ordre des fibres externes du ventricule gauche, qui par leurs extrémités s'y attachent.

L'Auteur décrit plus exactement, qu'il n'avoit fait dans la premiere déſcription, la ſtructure des fibres rayonnées, qui ſe trouvent autour de la pointe du ventricule gauche, principalement dans la ſurface ſupérieure. Il y a deux faiſceaux, qui prennent le même cours avec les autres fibres de leur ordre, mais qu'il en faut bien diſtinguer. L'un eſt plus poſtérieur & plus long, l'autre plus antérieur & plus court. Il ſeroit trop long, de vouloir donner ici une idée de la diſpoſition & de la ſtructure de ces fibres rayonnées, desquelles dépend la plus ſinguliere action du ventricule gauche, dont nous avons rendu compte dans l'annoncé du cinquieme mémoire ſur l'action des fibres externes du ventricule gauche. Il faut nous contenter de dire, que toute cette ſtructure dépend uniquement du cours des deux faiſceaux mentionnés, que l'Auteur appelle *faſciculi procurrentes*. Mais comme toutes les fibres rayonnées de la ſurface ſupérieure aboutiſſent à ces faiſceaux; celles de l'ordre ſecond, qui produiſent les fibres rayonnées de la ſurface inférieure, ſe terminent, comme il eſt dit, aux faiſceaux terminaux. Ainſi toute la figure rayonnée, que les fibres produiſent autour de la pointe du ventricule gauche, repoſe uniquement ſur la diſpoſition de ces faiſceaux, dont nous avons parlé. L'Auteur n'avoit point obſervé ces

aa 2 fais-

faiſceaux dans les premiers coeurs, qu'il avoit examinés. Cependant ils ſont très conſtans, & il n'y a point de doute, qu'ils n'ayent pas exiſté auſſi dans ces mêmes coeurs. Mais il eſt infiniment plus difficile d'appercevoir une ſtrúcture ſinguliere, non réjailliſſante, dont on n'a eu auparavant aucune idée, que de la trouver, lorsqu'elle eſt connue.

Comme toutes ces circonſtances, nouvellement obſervées, produiſent divers changemens néceſſaires à faire dans la déſcription des fibres externes, principalement pour ce, qui regarde leur inſertion; l'Auteur détermine plus exactement cette inſertion pour toutes les fibres externes du ventricule gauche, & donne toute une nouvelle déſcription, plus exacte & plus complette, du troiſieme & quatrieme ordre de ces fibres.

II.

De ordine fibrarum muſcularium cordis Diſſertatio VII. De ſtratis fibrarum in vniuerſum.

Auctore Eodem. pag. 227.

Après avoir fini la déſcription des fibres externes des deux ventricules, & déterminé leurs actions, l'Auteur vient aux diverſes couches intérieures des fibres muſculaires, dont les ventricules ſont compoſés, & desquelles les fibres externes dans chaque ventricule n'étoient que la premiere. Il traite dans ce mémoire des diverſes couches de fibres en général.

Les Anatomiſtes, qui ſe ſont appliqués en particulier aux recherches ſur les fibres du coeur, comme *Locverus* & *Senac*, qui

qui pour ainsi dire en sont les Auteurs classiques, n'ont pas manqué, il est vrai, d'observer ces couches diverses, qui au reste ne pouvoient pas facilement échapper. Mais ni le nombre des couches, ni leurs singularités, par lesquelles elles diffèrent les unes des autres, ont été connues par eux; pour ne rien dire des diverses bandes ou faisceaux de fibres, dont elles sont composées, de l'origine de ces bandes, de leur progrès & de leur insertion, que ces habiles Anatomistes n'ont point observés dans ces couches intérieures non plus que dans les fibres externes. M. Wolff doute même, qu'aucun des Anatomistes ait vû entières ces couches, dont ils parlent, & que plutôt ils n'en ayent vû qu'une petite portion, dans laquelle ils ayent observé la direction des fibres, pour attribuer cette même direction à toute la couche. Ces Anatomistes parlent toujours de couches complettes, qui, comme les fibres externes, s'étendent sur toute la surface du ventricule de la base jusqu'à la pointe, & du bord supérieur de la cloison jusqu'au bord inférieur. Ils présentent même ces couches complettes dans leurs planches, ajoutées à leurs déscriptions. Mais telles ne sont point les couches de fibres, couvertes par les fibres externes. Elles commencent bien à la base, & s'étendent de là vers la pointe, mais elles n'y arrivent pas. Et plus les couches sont intérieures, plus la partie, qui leur manque, est considérable, excepté la couche dernière ou interne, qui, comme l'externe, dans les deux ventricules est toute complette. Il manque à la seconde ou moyenne couche du ventricule droit dans la surface supérieure la troisieme partie. La couche troisieme du ventricule gauche ne s'étend que sur les trois quatriemes parties du ventricule. La dernière partie quatrieme de celui-ci n'est couverte que de la couche externe & en partie de la seconde couche. Enfin la couche quatrieme du ventricule gauche ne couvre qu'à peu près la trosieme par-

 tie

tie du ventricule à la base; tout le reste du ventricule ne participe que des trois extérieures couches. Ces circonstances ne sont pas de nature à pouvoir être échappés à l'observation; & sans doute si les anatomistes eussent jamais vû ces couches entières autant qu'elles existent, ils ne les auroient pû ni decrire complettes, ni dessiner telles, comme ils ont fait. Aussi ces desseins, qu'ils en ont donnés n'ont-ils pas la moindre ressemblance avec la nature. Mais comme il est facile de découvrir une petite partie d'une couche couverte, & qu'au contraire il faut beaucoup de patience & d'exactitude pour tirer toute une couche d'une autre couche, qu'elle couvre, sans blesser ni la couche couverte, ni celle, qu'on en tire, & sans arracher dans le prémier cas des portions de fibres à la couche couverte, ou de laisser dans le second cas des portions de fibres de la couche tirée sur la couche découverte, qui n'appartenant pas à celle-ci cachent sa vraie structure; il est vraisemblable, que, supposant, que par toutes ses diverses parties les couches se ressemblent, on n'ait découvert des diverses couches que de petites parties, d'après lesquelles on s'est formé l'idée de toute la couche. On s'est bien trompé au reste dans cette supposition, puisqu'on trouve non seulement des structures toutes diverses dans les diverses parties d'une couche, mais que même aussi la direction des fibres, laquelle seule d'ailleurs les anatomistes ont eu coutume d'observer, n'est point du tout la même par toute une couche.

M. Wolff réduit le nombre des couches du ventricule droit à trois, celui du gauche à six. Il définit chacune de ces couches, détermine la direction de leurs fibres & décrit leurs termes, c'est à dire jusqu'à quelle région chaque couche s'étend sur le ventricule, comme nous avons dit. Il déduit de là une chose très connue, & qui seule auroit dû avertir les

les anatomistes, que les diverses couches ne peuvent pas toutes s'étendre sur tout le ventricule. C'est la diverse épaisseur des parois des ventricules, que l'on observe en les disséquant par une section longitudinale. Ces parois sont toujours plus épaisses vers la base, plus minces vers la pointe. On observe cela dans les deux ventricules; mais il est plus remarquable dans le gauche, qui, chargé de plusieurs couches, a en général les parois plus épaisses. Celles-ci se trouvant à peu près de deux lignes d'épaisseur vers la pointe surpassent cinq lignes près de la base, & on voit évidemment, comme de la base vers la pointe l'épaisseur diminue successivement, à proportion, que les diverses couches finissent.

L'Auteur parle ensuite de la différence, qui se trouve en général entre les fibres externes & les couches de fibres moyennes, ou intérieures. Il explique, pourquoi il étoit nécessaire, que les fibres externes fussent plus compliquées & plus fermes, que les intérieures, & il traite enfin de ce tissu cellulaire délié, par lequel diverses couches de fibres sont attachées les unes aux autres. C'est un vrai tissu cellulaire pour ce, qui regarde sa structure, mais les fibrilles, dont il est composé, semblent participer de la nature musculaire.

II.

Cinerum clavellatorum Rossiae, itemque cinerum betulinorum examen chemicum.

Auctore *I. G. Georgi*, pag. 250.

La Potasse qui est un produit important des vastes forets de la Russie, devient encore une branche très considérable du commerce tant à l'égard de son consomption dans les savonneries & verreries, que par son exportation qui au seul port de St. Pétersbourg monte au delà de 35 mille poudes par an. M. Géorgi a donc cru cet objet bien digne de ses recherches, & c'est ce qui l'a déterminé à examiner chymiquement les diverses espéces de potasse qui sont connues en Russie, pour pouvoir les comparer avec celles qui se fabriquent dans les autres païs. Il indique d'abord les provinces qui en produisent le plus copieusement, telles que Penza, Nichnenovogorod, Kasan, & toutes celles où des bois immenses abondent en bouleaux, peupliers, tilleuls, & autres arbres semblables connus pour en fournir des riches recoltes. Notre Académicien donne ensuite une description de la maniere de fabriquer la Potasse en Russie, & range les différentes variétés qu'on en trouve sous trois classes; savoir *l'Ardasse* de la troisieme bonté, qui est la moins pure, & encore mélée de cendres crues, *la Potasse* de la seconde bonté, & *la Perlasse* qui est la plus épurée: toutes ces variétés contiennent un sel alcali pur, du tartre vitriolé & des terres calcaires & vitrifiables plus au moins mélées de sable, ainsi que des parties martiales.

M. Géorgi en donne les proportions pour chaque variété, & passe ensuite à un examen chymique des cendres de bou-

bouleaux purs, & de celles de bouleaux mélés d'autres espéces de bois; où il a bien trouvé de la magnéſie blanche en très petite quantité, mais où il a cherché en vain de la manganéſe que les chymiſtes Suedois prétendent avoir trouvé dans ces cendres en grande quantité.

IV.

Mineralium quorundam rariorum recenſio, adiectis obſeruationibus geologicis.

Auctore *I. I. Ferber*, pag. 260.

M. Ferber ayant fait un voyage par les états Autrichiens dans le deſſein de s'inſtruire de près de la nouvelle méthode d'amalgamer les minérais d'or & d'argent, pour en tirer avec le plus grand avantage le métal précieux qui s'y trouve, méthode inventée par le célébre M. de Born: il a eu occaſion en paſſant par la Saxe, la Bohème & la Hongrie, de voir & de ramaſſer pluſieurs foſſiles très interéſſantes & inſtructives pour les minéralogues, pour ceux ſurtout qui tâchent de pénétrer plus en avant dans les myſteres du la nature pour former les minéraux. Le nombre des pieces dont il donne ici les déſcriptions monte à 74; & il y en a de bien rares & de fort rémarquables, que les minéralogues liront avec un grand interet, telles ſont la magnéſie vitriolée nâtive, le quartz jaune en criſtaux rhomboidaux, le plomb minéraliſé par l'acide du ſel, l'antimoine blanc, un ichtyolite dans du gyps, & autres. Notre académicien promet auſſi dans ſon mémoire de publier une nouvelle édition de la *Sciagraphia Bergmanniana*, dans laquelle il remplira les vuides de la gradation de la nature par de nouveaux genres & eſpéces de minéraux decouverts dans ces derniers temps.

V.

Petrefacta ignota.

Auctore *Baf. Zujew*, pag. 274.

Les deux pétrifications inconnues dont M. Zouyef donne ici la déscription, ne reffemblent ni l'une ni l'autre à aucun corps organifé vivant que nous connoiffons. On ne peut non plus les compter parmi les foffiles figurés. Cependant M. Zouyef croit y remarquer quelques traits particuliers, qui lui font foupçonner que l'une de ces pieces eft un poiffon inconnu, & l'autre la corne d'un animal pareillement inconnu. L'une & l'autre font minéralifées & ont été trouvées en Sibérie dans les mines de fer blanc.

VI.

Dianthi noui hybridi.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 277.

Presque toutes les expériences que M. Koelreuter expofe dans ce mémoire ont fupérieurement bien réuffi & doivent encourager les fleuriftes à continuer d'imiter les procédés mis en vogue par notre Auteur, pour la production de nouvelles variétés de plantes par le mélange fexuel d'efpéces différentes. Effectivement on doit à l'exemple de M. Koelreuter la production de ce grand nombre de variétés d'oeillets des jardins, qui ont paru en Europe depuis une vingtaine d'années, & qui continuent encore à paroitre. Peut-être devons nous auffi beaucoup d'excellentes plantes potagéres à un femblable mélange d'efpéces: & il feroit bien à fouhaiter qu'un phyficien auffi exercé dans ces expériences puiffe employer fon ſon temps à y aſſujettir toutes les plantes économiques qui peuvent être multipliées de marcottes ou de racines afin que les variétés hybrides qui poſſéderoient quelques qualités éminentes, puiſſent être multipliées pour le bien de la Société.

VII.
Sorex caecutiens.

Auctore E. *Laxmann*, pag. 285.

Le muſaraigne dont on donne ici les proportions & les méſures, péſe 65 grains: il eſt donc un tant ſoit peu plus gros que celui que M. le Conſeiller de Colleges Pallas a trouvé auprès du Lac Baikal, & qu'il nomme le muſaraigne à demi-aveugle. Voyez les voyages de M. Pallas Tom. I. pag. 454.

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Eclairciſſemens ſur le mémoire de M. de la Grange, inſéré dans le 5^e Volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les réſultats de pluſieurs obſervations, &c.

Par M. *Léonard Euler*, pag. 289.

On ſait que les Aſtronomes, après avoir fait un certain nombre d'obſervations qui donnent des réſultats differens, prennent la ſomme de ces réſultats & la diviſent par le nombre des obſervations. L'Auteur de ce mémoire s'étoit propoſé de déterminer la probabilité que cette ſomme devienne égale ou à zero ou à un autre nombre quelconque, poſitif ou négatif. Il ſuppoſe, pour cet effet, que pour connoître la hauteur d'un aſtre, ou ſa déclinaiſon, ou enfin quoi que ce ſoit, on ait fait a obſervations qui donnent au juſte ce qu'on cherche, b obſervations qui le donnent d'une minute trop grand, & c obſervations qui le donnent trop petit d'une minute, de ſorte que le nombre de toutes les obſervations faites à ce ſujet ſoit $N = a + b + c$; & il s'agit de voir quelle ſera la probabilité que la ſomme des reſultats devienne ou 0, ou ± 1, ou ± 2, ou ± 3, &c.

Cette queſtion ſe reduit à la ſuivante: De N billets, dont a ſont marqués par 0, b par $+1$ & c par -1, on tire au hazard ſucceſſivement n billets, en remettant chaque fois

fois le billet tiré: & l'on demande la probabilité que la somme de tous les nombres tirés soit ou o, ou ± 1, ou ± 2, &c., Problème dont l'auteur considère d'abord quelques cas particuliers, où $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ & $n = 4$, dont la résolution est suivie du Problème général résolu par les principes connûs de la Théorie des combinaisons & du calcul des probabilités, par le développement de la puissance $N^n = (a+b+c)^n$, où la forme générale de chaque terme est $M\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$, la somme des exposans étant $\alpha + \beta + \gamma = n$ & le coéfficient

$$M = \frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\, n}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,\alpha \times 1.\,2.\,3.\,\ldots\,\beta \times 1.\,2.\,3\,\ldots\,\gamma}.$$

Ces opérations sont longues & desagréables, si on les fait de la maniere ordinaire; M. Euler fait voir comment on peut trouver les termes affectés de la même puissance $\alpha + \beta + \gamma = n$, sans recourir au développement actuel, & il finit son mémoire par la résolution du Problème général, où, après avoir fait $N = a + b + c + d +$ &c. observations, dont les

a ont la même erreur α,
b - - - - β,
c - - - - γ,
&c.

on veut savoir la probabilité que le milieu devienne un nombre quelconque $\frac{\lambda}{n}$. Pour cet effet il faut considérer la puissance $(a\,x^\alpha + b\,x^\beta + c\,x^\gamma + \&c.)^n$ & prendre la somme de tous les termes affectés de la même puissance x^λ, qui divisée par N^n donnera la probabilité que le milieu sera $\frac{\lambda}{n}$.

II.

Determinatio latitudinis & longitudinis fortalitii Mosdok deducta ex obseruationibus anno 1785 a Theodoro Tschernoi institutis.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 298.

M. Tschernoi, après avoir achevé de déterminer la situation géographique des principaux endroits de la Tauride, se rendit à Mosdoc vers la fin de Septembre 1785. Les observations qu'il y a faites pour vérifier surtout la longitude, sur laquelle l'Académie avoit encore quelque doute, ont toutes l'empreinte d'une exacte vérité. Après avoir recherché la vérification du quart de cercle, notre observateur a pris en diverses soirées les hauteurs méridiennes de cinq étoiles fixes, qui jointes à celles du soleil donnent très exactement la latitude de la forteresse de Mosdoc de 43°. 43′. 23″. Il s'est appliqué ensuite à observer quelques émersions des satellites de Jupiter, dont deux se trouvant être correspondantes à celles que M. le Comte de Cassini a eu la complaisance de communiquer, M. le Conseiller de Cour Roumovski en conclut avec une précision suffisante, la difference entre les méridiens de Mosdoc & de Paris de 2^h. 46′ de temps ou bien de 41°. 30′ en arc de l'équateur; & par consequent la longitude de Mosdoc depuis le premier méridien de 61°. 30′.

L'aiguille magnétique a été trouvée décliner le 10 Octobre n. st. de 6°. 40′ vers l'Ouest.

III.

III.

Remarque sur une nouvelle méthode de trouver l'Anomalie excentrique par l'anomalie moyenne.

Par M. *Nicolas Fuss*, pag. 302.

Cette remarque a été occasionnée par une nouvelle formule que M. Klügel avoit donnée dans les Ephémérides de Berlin pour déterminer l'Anomalie excentrique, l'Anomalie moyenne étant donnée. M. Fuss renouvelle, à cette occasion, la mémoire d'une expression très-simple & facile à calculer, que feu M. Euler avoit déja donnée autrefois dans les anciens Commentaires de l'Académie, & dont ce petit mémoire fait voir les avantages par quelques applications convenables.

IV.

Extrait des Observations météorologiques faites à St. Pétersbourg.

Suivant le nouveau Stile.

Par M. *Jean-Albert Euler*, pag. 307.

I. Pendant l'Eté de 1785, ou depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 1785, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La Neva debacla le 2 de Mai, & fut reprise après 223 jours le 8 Décembre.

Il géla pour la derniere fois le 11 Mai, & il recommença à géler le 19 Septembre: l'intervalle entre ces deux époques est donc de 131 & par conséquent de 2 jours moindre qu'en 1784.

II

Il neigea pour la derniere fois le 10 Mai, & il recommença à neiger le 17 Septembre, ce qui donne un intervalle de 130 jours.

La plus grande chaleur a été de 108 degrés le 23 Juillet après midi: par conféquent de 5 degrés plus petite qu'en 1784.

La moyenne chaleur deduite de celles qui ont été obfervées à 2 heures après midi, a été de $129\frac{4}{5}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $124\frac{9}{10}$: par conféquent confidérablement moindre qu'en 1784.

La moyenne chaleur tirée des obfervations faites aux heures du matin & du foir a été pour les mêmes intervalles de temps: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, de $138\frac{3}{10}$ & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $133\frac{9}{10}$: encore plus petite qu'en 1784.

La chaleur à 2 heures après midi n'a été qu'en 2 jours plus grande que 110: elle a été en
32 jours entre 120 & 110
57 jours entre 130 & 120
58 jours entre 140 & 130 &
35 jours entre 150 & 140 degré.

La chaleur obfervée aux heures du matin & du foir s'eft trouvée en 19 jours moindre que 150: ou bien il a gélé en 19 jours: elle a été en
72 jours entre 140 & 150
57 jours entre 130 & 140 &
36 jours entre 120 & 130 degrés.

L'Eté

L'Eté de 1785 a par conséquent été à tous égards moins favorisé que ceux des années précédentes.

Le Baromètre a été au plus haut le 13 Septembre à 12 heures midi, de 28. 36 pouces. Therm. 129. Calme & ciel serein. Au plus bas le 12 Juillet à 3 heures matin, de 27. 21 pouces. Thermom. 132. Vent du SOu. Ciel couvert & beaucoup de pluie. La variation totale 1. 15 & le milieu 27. 785 pouces.

La hauteur moyenne 27, 842: par conséquent de 0, 201 ou de $\frac{201}{1000}$ pouces plus petite qu'en 1784, ce qui fait une différence de presque 2 lignes & demie.

Enfin la hauteur barometrique a surpassé 27, 90 pouces pendant 78 jours 15 heures, 28 pouces pendant 50 jours 15 heures & 28. 10 pouces pendant 23 jours 18 heures.

Les Vents forts ont soufflé

3 jours du Nord: le 4. 30 Juin & le 2 Septembre.
6 jours du NE: le 28. 29 Mai, le 15 Juin & le 5. 7. 11 Juillet.
6 jours de l'Est: le 3. 6. 9 Juin, le 6. 27 Juillet & le 20 Août.
3 jours du SE: le 23 Juillet, le 11 Août & le 14 Octobre.
8 jours du Sud: le 18. 19 Mai, 26. 28 Août, le 6 Sept. & le 26. 28. 29 Octobre.
9 jours du SOu: le 8. 20 Mai, le 26. 27 Septembre & le 24. 25. 27. 29. 31 Octobre.
9 jours de l'Ouest: le 9. 10 Mai, le 2. 3 Août, le 7. 8. 24. 28 Septembre & le 23 Octobre.

4 jours du NOu. le 11 Mai, le 14 Juin, le 28 Juillet & le 23 Septembre.

parmi lesquels les vents du 14. 15 Juin, 28 Juillet & du 26. 27 Octobre ont été les plus violens.

Cet été a donc été moins venteux que le précédent, mais le vent dominant a encore été celui de l'Oueſt.

Enfin il y eut:

49 jours de ciel entiérement ſerein; 57 jours de ciel entiérement couvert, & 12 jours de brouillard.
26 jours de pluie copieuſe, 73 jours de pluie médiocre: en tout 99 jours de pluie: 11 jours de neige & 4 jours de grèle.
4 orages complets, 3 jours où il n'a fait que tonner de loin: 5 fois éclairs de nuit, & 8 aurores boréales, dont 4 fûrent fort ſplendides.

II. Pendant l'hyver de 1785 à 1786, en y comprenant les quatre premiers Mois de 1786; ainſi depuis le 1^er^ Novembre 1785 jusqu'au 1^er^ Mai 1786, ce qui fait un nombre de 181 jours.

La Neva ayant été priſe le 8 Décembre, elle demeura dans ſon état de congélation pendant 134 jours, jusqu'au 22 Avril, où elle débacla à 10 h. avant midi, par une temperature de 142 degrés de Delisle. Barom. 28. 33. Calme, ciel ſerein.

L'intervalle entre la 1^re^ gélée du 19 Septembre & la derniere du 11 Mai eſt de 234 jours; c'eſt à dire de 11 jours plus

plus grand que l'hyver précedent. La premiere neige étant tombée le 17 Septembre, il neigea pour la derniere fois le 2 Mai; l'intervalle entre ces deux époques est de 227 jours.

Le plus grand froid après la graduation de Délisle a été de 202 degrés le 2 Janvier à 8 heures du matin. Barom. 28. 52. Ciel serein, vent du Nord peu sensible.

Le froid moyen deduit des observations faites aux heures du matin & du soir est de $163\frac{1}{3}$, & depuis le 1 Décembre jusqu'au 1er Avil de $168\frac{1}{2}$ degrés : ce qui ne diffère prèsque point du froid moyen de l'hyver précedent.

Le froid moyen entre ceux qui ont été observés à 2 heures après midi, est de $154\frac{1}{4}$ & pour l'intervalle du 1 Décembre au 1er Avril de 160 degrés.

Le froid observé aux heures du matin & du soir a été

1 jour plus grand que 200 degrés, au 2 Janvier
8 jours entre 190 & 200
14 jours entre 180 & 190
31 jours entre 170 & 180
30 jours entre 160 & 170
82 jours entre 150 & 160 &
15 jours moindre que 150 degrés, ou de dégel continuel.

Le froid des après-midi, observé à 2 heures, a été

6 jours moindre que 130 degrés, vers la fin d'Avril
19 jours entre 140 & 130, en Mars & en Avril
53 jours entre 150 & 140: ce qui font 78 jours, où il n'a dégelé qu'aux heures de l'après midi. Ensuite

46 jours entre 160 & 150 degrés
36 jours entre 170 & 160 ——
15 jours entre 180 & 170 ——
3 jours entre 190 & 180 &
3 jours entre 200 & 190 degrés: par conséquent 103 jours de gelée continuelle.

Le Baromètre a été: au plus haut 29. 04 le 17 Décembre à 1 heure après midi, & au plus bas 27. 01 le 29 Janvier à 7 heures du matin. Therm. 150. Vent très fort du NOu. Ciel couvert, neige & pluie. La variation totale 2. 03 & le milieu 28. 025. Ensuite la hauteur moyenne 28. 155 ou 28. $\frac{115}{1000}$ pouces de Paris. Enfin la hauteur du Baromètre a été 129 jours plus grande que 27, 90, 114 jours 6 heures plus grande que 28. 00, & 101 jours 18 heures plus grande que 28. 10 pouces.

Les Vents forts ont soufflé

5 jours du Nord le 29 Décembre, & le 3. 16. 19. 21 Février.
1 jours du NE. le 14 Novembre.
7 jours de l'Est, le 7 Novembre, le 4. 10 Décembre, le 3 Janvier & le 1. 26. 27 Mars.
5 jours du SE, le 12. 13. 28 Décembre, le 15 Janv. & le 30 Mars.
6 jours du Sud, le 28 Novembre, le 21 Décembre, le 26 Janv. & le 14. 15. 18 Février.
15 jours du SOu. le 1. 10. 15. 24 Novembre, le 1. 5 Décembre, le 13 Janv. le 5. 6 Févr. le 15 Mars & le 10. 11. 14. 15. 30 Avril.

8 jours

8 jours de l'Oueſt, le 11. 17. 26 Novembre, le 20 Décembre, le 14. 21. 27 Janvier, & le 16 Mars.

9 jours du NOu. le 12. 16. 25 Novembre, le 18. 19 Décembre, le 28. 29 Janvier & le 23. 28 Fevrier.

entre lesquels les vents du 10 & 24 Novembre, ceux du 3. 26. 29 Janvier & du 14. 15 & 18 Février, ont été les plus violens.

Enfin il y a eu:

49 jours de ciel entiérement ſerein, 85 jours de ciel entiérement couvert & 18 jours de brouillard: enſuite

8 jours de neige copieuſe & 65 jours de neige médiocre, en tout 73 jours de neige: 18 jours de pluie: 1 jour de gréle: enfin 26 aurores boréales, dont 14 étoient très ſplendides.

Errata.

Pag. 269. lin. 1. *lege* & *aurantii* coloris

lin. 4. —— paruulas cochleas

lin. 8. —— quem primaeuum vocitare

lin. 15. —— fodinis plumbiferis

lin. 18. —— ſpatoſas

lin. 19. —— Banatus temiſenſis

lin. 20. —— fodina Laurentii

Pag. 270. lin. 12 et 14 *lege* Cobalti *loco* Cabalti

lin. 22 *lege* Cultro ſcinditur

Pag. 271. lin. 5. *lege* Vngariae ſuperioris, nec non

lin. 25 *lege* Inſident galenae plumbi

Pag. 272. lin. 8 et 9 *lege* Lazuli imitatur

lin. 11. *lege* qualis ad

lin. 21. —— inquirere potui

lin. 26. —— ſchoerlum viridem

lin. 28. —— prope *Reichenberg*

Pag. 301. lin. 5 et 6 *lege* $2^h. 46'$ ſiue $41^\circ. 30'$ a meridiano Pariſino et $61^\circ. 30'$ a meridiano primo.

MATHE-

MATHEMATICA.

METHODVS FACILIS INVENIENDI INTEGRALE HVIVS FORMVLAE

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos.\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos.\theta + 1},$$

CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR VEL $x = 1$ VEL $x = \infty$.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

§. 1.

Denotet S integrale huius formulae generaliter ſumtum, ita vt quaeri debeat valor ipſius S, caſu quo ſtatuitur $x = 1$; vbi primum obſeruo, formam propoſitam multo concinniorem reddi, ſi fractionis numerator et denominator per x^n diuidantur; tum enim habebimus

$$S = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2\cos.\zeta + x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}.$$

Hic ſtatim patet, denominatorem $x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}$ ſemper in n factores reſolui poſſe, qui ſinguli ſint formae $x^1 - 2\cos.\omega + x^{-1}$, vbi angulum ω ita capi oportet, vt, dum iſte euaneſcit, ſimul etiam ipſe denominator ad nihilum redigatur.

§. 2. Posito autem isto factore $x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}} = 0$, inde fit $x = \cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega$, vnde in genere colligitur

$$x^{\lambda} = \cos.\lambda\omega + \sqrt{-1}\sin.\lambda\omega \text{ et}$$
$$x^{-\lambda} = \cos.\lambda\omega - \sqrt{-1}\sin.\lambda\omega.$$

Hinc ergo denominator istum accipiet valorem: $2\cos.n\omega - 2\cos.\theta$, qui igitur euanescet, si pro $n\omega$ sumatur aliquis ex his valoribus:

$$\theta,\ \theta + 2\pi,\ \theta + 4\pi,\ \theta + 6\pi,\ \theta + 8\pi, \text{ etc.}$$

quare cum numerus horum valorum debeat esse $= n$, omnes valores anguli ω erunt sequentes:

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta + 2\pi}{n},\ \frac{\theta + 4\pi}{n},\ \frac{\theta + 6\pi}{n},\ \ldots\ldots\ \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Praeterea vero cum sit $\cos.n\omega = \cos.\theta$, erit etiam $\sin.n\omega = \sin.\theta$.

§. 3. Cum igitur denominator habeat n factores huius formae: $x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}}$, nostra fractio, quicunque fuerit eius numerator, in n fractiones simplices resolui poterit, quarum denominatores erunt illi n factores denominatoris. Scribamus igitur breuitatis gratia Π loco numeratoris $x^{p} - 2\cos.\zeta + x^{-p}$, atque haec fractio: $\frac{\Pi}{x^{n} - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ resoluetur in n fractiones simplices, quarum singulae hanc habebunt formam: $\frac{\mathrm{P}}{x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}}}$, quocirca statuamus:

$$\frac{\Pi}{x^{n} - 2\cos.\theta + x^{-n}} = \frac{\mathrm{P}}{x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}}} + \mathrm{R};$$

vbi littera R omnes reliquas complectatur fractiones, vnde statim habebimus

$$\frac{\Pi(x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}})}{x^{n} - 2\cos.\theta + x^{-n}} = \mathrm{P} + \mathrm{R}(x^{\mathrm{I}} - 2\cos.\omega + x^{-\mathrm{I}}).$$

Quodsi

Quodsi iam faciamus $x^1 - 2\,\text{cos}.\,\omega + x^{-1} = 0$, hinc colligemus numeratorem P: erit enim

$$P = \frac{\Pi\,(x^1 - 2\,\text{cos}.\,\omega + x^{-1})}{x^n - 2\,\text{cos}.\,\theta + x^{-n}},$$

siquidem in hac aequatione ponatur $x = \text{cos}.\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{sin}.\,\omega$.

§. 4. At vero iam vidimus, si ipsi x hunc valorem tribuamus, illius fractionis tam numeratorem quam denominatorem euanescere, quamobrem secundum regulam notissimam loco numeratoris et denominatoris sua scribamus differentialia, ac prodibit $P = \frac{\Pi\,(x^1 - x^{-1})}{n\,x^n - n\,x^{-n}}$. Nunc igitur si loco x valor assignatus scribatur, primo pro Π nanciscemur hunc valorem:

$$\Pi = 2\,\text{cos}.\,p\,\omega - 2\,\text{cos}.\,\zeta;$$

ex fractione autem oritur iste valor: $\frac{\text{sin}.\,\omega}{n\,\text{sin}.\,n\,\omega}$, quae ergo expressio cum sit realis, numerator quaesitus erit

$$P = \frac{2\,\text{sin}.\,\omega\,(\text{cos}.\,p\,\omega - \text{cos}.\,\zeta)}{n\,\text{sin}.\,n\,\omega}.$$

Iam autem vidimus esse $\text{sin}.\,n\,\omega = \text{sin}.\,\theta$, vnde iste numerator erit $P = \frac{2\,\text{sin}.\,\omega\,(\text{cos}.\,p\,\omega - \text{cos}.\,\zeta)}{n\,\text{sin}.\,\theta}$.

§. 5. Quaelibet igitur fractio partialis ex resolutione fractionis propositae oriunda erit huiusmodi:

$$\frac{2\,(\text{cos}.\,p\,\omega - \text{cos}.\,\zeta)}{n\,\text{sin}.\,\theta} \cdot \frac{\text{sin}.\,\omega}{x^1 - 2\,\text{cos}.\,\omega + x^{-1}},$$

in qua forma si angulo ω successiue tribuantur omnes valores supra assignati, qui erant

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta + 2\pi}{n},\ \frac{\theta + 4\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n},$$

orientur omnes fractiones partiales, quae in vnam summam col-

collectae ipsam formam propositam $\frac{x^p - 2 \cos. \zeta + x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$ producere debebunt, vnde etiam singulae in $\frac{\partial x}{x}$ ductae et integratae, tum vero in vnam summam collectae, exhibebunt integrale quaesitum S.

§. 6. Consideremus igitur fractionem: $\frac{\sin. \omega}{x^1 - 2 \cos. \omega + x^{-1}}$, quae ducta in $\frac{\partial x}{x}$ praebet $\frac{\partial x \sin. \omega}{x^2 - 2 \cos. \omega + 1}$, cuius integrale, ita sumtum vt euanescat posito $x = 0$, constat esse $= A \tang. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos \omega}$. Hinc igitur ex hac fractione partiali oritur ista pars integralis: $\frac{2 (\cos. p \omega - \cos. \zeta)}{n \sin. \theta} . A \tang. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$, vnde ergo facile deducuntur omnes n partes integralis quaesiti, si loco ω ordine omnes eius valores assignati substituantur atque in vnam summam colligantur.

§. 7. Quoniam autem hoc loco eum tantum integralis valorem postulamus, qui oritur posito $x = 1$, hoc casu fiet

$$A \tang. \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega} = A \tang. \frac{\sin. \omega}{1 - \cos. \omega}.$$

At vero ista formula $\frac{\sin. \omega}{1 - \cos. \omega}$ exprimit cotangentem anguli $\frac{1}{2} \omega$, ideoque tangentem anguli $\frac{\pi - \omega}{2}$, ita vt hoc casu pars integralis futura sit $\frac{\cos. p \omega - \cos. \zeta}{n \sin. \theta} (\pi - \omega)$. Hic autem in transitu notasse iuuabit, si desideretur integrale pro casu $x = \infty$, tum proditurum esse $A \tang. - \frac{\sin \omega}{\cos. \omega}$; quia igitur est $- \frac{\sin. \omega}{\cos. \omega}$ tangens anguli $\pi - \omega$, cum ante habuissemus $\frac{\pi - \omega}{2}$, hinc patet, casu $x = \infty$ etiam totum integrale duplo maius fore quam casu $x = 1$.

§. 8. Tribuamus igitur angulo ω succeſſiue omnes eius valores, eosque ordine hic ſiſtamus, eritque

$$S = \frac{\operatorname{cof.} \frac{p\theta}{n} - \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \left(\pi - \frac{\theta}{n}\right)$$

$$+ \frac{\operatorname{cof.} \frac{p}{n}(\theta + 2\pi) - \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \frac{((n-2)\pi - \theta)}{n}$$

$$+ \frac{\operatorname{cof.} \frac{p}{n}(\theta + 4\pi) - \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \frac{((n-4)\pi - \theta)}{n}$$

$$+ \frac{\operatorname{cof.} \frac{p}{n}(\theta + 6\pi) - \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \frac{((n-6)\pi - \theta)}{n}$$

etc.

quarum formularum numerus debet eſſe $= n$. Haec autem expreſſio ſtatim in duas partes diſtinguatur hoc modo indicandas: $S = \frac{Q}{n \operatorname{fin.} \theta} - \frac{R \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta}$, ita vt ſit

$$Q = \frac{n\pi - \theta}{n} \operatorname{cof.} \frac{p\theta}{n} + \frac{((n-2)\pi - \theta)}{n} \operatorname{cof.} \frac{p}{n}(\theta + 2\pi)$$
$$+ \frac{((n-4)\pi - \theta)}{n} \operatorname{cof.} \frac{p}{n}(\theta + 4\pi) \text{ etc.}$$

$$R = \frac{n\pi - \theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-6)\pi - \theta}{n} + \text{etc.}$$

ita vt iam nobis incumbatur in valores litterarum Q et R inquirere.

§. 9. Primo autem ſtatim patet, valorem ipſius R eſſe progreſſionem arithmeticam decreſcentem differentia $\frac{2\pi}{n}$, vnde ſumma n terminorum erit $= \pi - \theta$, ita vt ſit $R = \pi - \theta$. At vero inuentio progreſſionis Q maiorem requirit apparatum, quem in finem ſequentes inueſtigationes generaliores praemittamus.

§. 10.

§. 10. Consideretur primo progressio ista cosinuum, quorum anguli in progressione arithmetica progrediantur et quorum numerus sit n:

$$t = \operatorname{cos.}(\alpha + 2\beta) + \operatorname{cos.}(\alpha + 4\beta) + \operatorname{cos.}(\alpha + 6\beta) + \ldots \ldots + \operatorname{cos.}(\alpha + 2n\beta).$$

Iam multiplicemus vtrinque per 2 sin. β, et cum sit

$$2 \operatorname{sin.} \beta \operatorname{cos.} \gamma = \operatorname{sin.}(\beta + \gamma) - \operatorname{sin.}(\gamma - \beta),$$

proueniet sequens forma:

$$2t \operatorname{sin.} \beta = -\operatorname{sin.}(\alpha + \beta) + \operatorname{sin.}(\alpha + 3\beta) + \operatorname{sin.}(\alpha + 5\beta) + \ldots \ldots \operatorname{sin.}(\alpha + (2n+1)\beta)$$
$$- \operatorname{sin.}(\alpha + 3\beta) - \operatorname{sin.}(\alpha + 5\beta) - \ldots$$

vbi omnes termini intermedii manifesto se destruunt, ita vt soli extremi remaneant, hincque ergo fiet

$$t = \frac{\operatorname{sin.}[\alpha + (2n+1)\beta] - \operatorname{sin.}(\alpha + \beta)}{2 \operatorname{sin.} \beta}.$$

§. 11. Deinde vero iidem cosinus combinentur cum numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, ... n, ac statuatur

$$u = 1 \operatorname{cos.}(\alpha + 2\beta) + 2 \operatorname{cos.}(\alpha + 4\beta) + 3 \operatorname{cos.}(\alpha + 6\beta) + \ldots \ldots + n \operatorname{cos.}(\alpha + 2n\beta)$$

qua expressione ducta in 2 sin. β, adhibita resolutione qua modo sumus vsi, consequemur

$$2u \operatorname{sin.} \beta = -\operatorname{sin.}(\alpha + \beta) + \operatorname{sin.}(\alpha + 3\beta) + 2 \operatorname{sin.}(\alpha + 5\beta) + \ldots \ldots + \operatorname{sin.}(\alpha + (2n+1)\beta)$$
$$- 2 \operatorname{sin.}(\alpha + 3\beta) - 3 \operatorname{sin.}(\alpha + 5\beta) - \ldots$$

quae forma reducitur ad istam:

$$n \operatorname{sin.}(\alpha + (2n+1)\beta) - 2u \operatorname{sin.} \beta = \operatorname{sin.}(\alpha + \beta) + \operatorname{sin.}(\alpha + 3\beta) + \ldots \ldots + \operatorname{sin.}(\alpha + (2n-1)\beta)$$

quae vocetur $= v$.

§. 12.

§. 12. Nunc iſta ſeries denuo ducatur in 2 ſin. β, et cum in genere ſit

$$2 \text{ ſin. } \beta \text{ ſin. } \gamma = \text{coſ.}(\gamma - \beta) - \text{coſ.}(\gamma + \beta),$$

nanciſcemur

$$2v \text{ ſin. } \beta = \text{coſ.}\alpha - \text{coſ.}(\alpha+2\beta) - \text{coſ.}(\alpha+4\beta) - \ldots - \text{coſ.}(\alpha+2n\beta)$$
$$+ \text{coſ.}(\alpha+2\beta) + \text{coſ.}(\alpha+4\beta) + \ldots$$

vnde ob terminos medios omnes ſe deſtruentes colligitur

$v = \frac{\text{coſ.}\alpha - \text{coſ.}(\alpha + 2n\beta)}{2 \text{ ſin. } \beta}$; quare cum ſit

$u = \frac{n \text{ ſin.}(\alpha + (2n+1)\beta) - v}{2 \text{ ſin. } \beta}$, hinc obtinemus

$$u = \frac{n \text{ ſin.}(\alpha + (2n+1)\beta)}{2 \text{ ſin. } \beta} - \frac{[\text{coſ.}\alpha - \text{coſ.}(\alpha + 2n\beta)]}{4 \text{ ſin. } \beta^2}.$$

§. 13. Combinemus nunc ambas ſummationes modo traditas in genere, ac ſtatuamus

$$V = (a+b)\text{coſ.}(\alpha+2\beta) + (a+2b)\text{coſ.}(\alpha+4\beta) + (a+3b)$$
$$\text{coſ.}(\alpha+6\beta) + \ldots\ldots (a+nb)\text{coſ.}(\alpha+2n\beta),$$

atque euidens eſt fore $V = at + bu$, vnde loco t et u valoribus ſubſtitutis erit

$$V = \frac{a \text{ ſin.}(\alpha+(2n+1)\beta) - a \text{ ſin.}(\alpha+\beta)}{2 \text{ ſin. } \beta} + \frac{bn \text{ ſin.}(\alpha+(2n+1)\beta)}{2 \text{ ſin. } \beta}$$
$$- \frac{b \text{ coſ.}\alpha + b \text{ coſ.}(\alpha+2n\beta)}{4 \text{ ſin. } \beta^2}.$$

§. 14. Iam ſatis perſpicuum eſt progreſſionem, quam ſupra littera Q exhibuimus, in iſta forma generali pro V inventa contineri, quandoquidem vtrinque idem terminorum numerus n occurrit, atque coëfficientes coſinuum ſeriei Q etiam progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Quamobrem pro coëfficientibus primo faciamus

$$a + b = \frac{n\pi - \theta}{n} \text{ et } a + 2b = \frac{(n-2)\pi - \theta}{n},$$

vnde deducimus

$$b = -\frac{2\pi}{n} \text{ et } a = \frac{(n+2)\pi - \theta}{n}.$$

Nunc etiam angulos inter ſe coaequemus faciamusque

$$\alpha + 2\beta = \frac{p\theta}{n} \text{ et } \alpha + 4\beta = \frac{p}{n}(\theta + 2\pi),$$

vnde colligimus $\beta = \frac{\pi p}{n}$, hincque porro

$$\alpha = \frac{p}{n}(\theta - 2\pi) = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta),$$

hocque modo fiet $V = Q$. At anguli in expreſſione ipſius V occurrentes erunt: primo

$$\alpha + (2n+1)\beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta)$$

vbi cum p ſit numerus integer, poſtrema pars $2\pi p$, totam circumferentiam exprimens, omiſſa eſt, ex quo habebimus

$$\text{ſin.}\,(\alpha + (2n+1)\beta = -\,\text{ſin.}\,\frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Deinde occurrit angulus

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta), \text{ cuius ſinus eſt}$$

$$\text{ſin.}\,(\alpha + \beta) = -\,\text{ſin.}\,\frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Denique erit

$$\alpha + 2n\beta = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta) \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\,(\alpha + 2n\beta) = \text{coſ.}\,\frac{p}{n}(2\pi - \theta).$$

His igitur valoribus ſubſtitutis prodibit

$$Q = V = -\frac{\frac{(n+2)\pi - \theta)}{n}\,\text{ſin.}\,\frac{p}{n}(\pi - \theta) + \frac{(n+2)\pi - \theta)}{n}\,\text{ſin.}\,\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{\pi p}{n}}$$

$$+ \frac{2\pi\,\text{ſin.}\,\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{\pi p}{n}}$$

$$+ \frac{\frac{2\pi}{n}\,\text{coſ.}\,\frac{p}{n}(2\pi - \theta) - \frac{2\pi}{n}\,\text{coſ.}\,\frac{p}{n}(2\pi - \theta)}{4\,\text{ſin.}\,\frac{\pi p^2}{n}}$$

quae

quae expressio manifesto reducitur ad hanc:

$$Q = V = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{\sin. \frac{\pi p}{n}}.$$

§. 15. Inuentis igitur valoribus litterarum Q et R, valor integralis quem quaerimus pro casu $x = 1$ erit

$$S = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta) \cos. \zeta}{n \sin. \theta}.$$

Sin autem integrale quaeratur a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$, eius valor duplo maior euadet.

§. 16. His iam in genere expeditis, consideremus casum iam saepius tractatum, quo est $\zeta = 90°$ et $\theta = 90°$, haecque formula integranda proponitur: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}}$, atque pro eius valore casu $x = 1$ habebimus $S = \frac{\pi \sin. \frac{p\pi}{2n}}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$, quae ob $\sin. \frac{p\pi}{n} = 2 \sin. \frac{p\pi}{2n} \cos. \frac{p\pi}{2n}$, abit in formulam illam notissimam $\frac{\pi}{2n \cos. \frac{p\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n}$ sec. $\frac{p\pi}{2n}$. Sin autem tantum sumamus $\zeta = 90$, vt formula integranda sit $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$, eius valor ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensus erit $\frac{\pi \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$, quae expressio reducitur ad hanc:

$$\frac{\pi}{n \sin. \theta}\left(\cos. \frac{p\theta}{n} - \sin. \frac{p\theta}{n} \cot. \frac{p\pi}{n}\right).$$

OBSERVATIONES
in integrationem traditam.

I. Primum hic obferuo terminum medium in numeratore exhibitum nullo modo integrationem turbare, quoniam, fi folus adeffet, integratio nulla laboraret difficultate; tum enim formula $\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1}{x^n - 2\operatorname{cof.}\theta + x^{-n}}$ reducitur ad hanc formam: $\int\frac{x^{n-1}\partial x}{x^{2n} - 2x^n\operatorname{cof.}\theta + 1}$, quae pofito $x^n = y$ abit in hanc: $\frac{1}{n}\int\frac{\partial y}{y - 2y\operatorname{cof.}\theta + 1}$, cuius integrale eft $\frac{1}{n\operatorname{fin.}\theta}$ A tang. $\frac{y\operatorname{fin.}\theta}{1 - y\operatorname{cof.}\theta}$, cuius valor, cafu $x = 1$, fit $\frac{1}{n\operatorname{fin.}\theta}$ A tang. $\frac{\operatorname{fin.}\theta}{1 - \operatorname{cof.}\theta} = \frac{(\pi - \theta)}{2n\operatorname{fin.}\theta}$, qui ductus in $-2\operatorname{cof.}\zeta$ praebet illam ipfam partem hinc oriundam in forma fupra inuenta, quamobrem fuperfluum foret hunc terminum in calculo retinere, vnde hanc formam integralem fumus contemplaturi: $\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\operatorname{cof.}\theta + x^{-n}}$, cuius valorem cafu $x = 1$ inuenimus $= \frac{\pi\operatorname{fin.}\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n\operatorname{fin.}\theta\operatorname{fin.}\frac{p\pi}{n}}$, quem breuitatis gratia littera P defignemus, ita vt fit $P = \frac{\pi\operatorname{fin.}\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n\operatorname{fin.}\theta\operatorname{fin.}\frac{p\pi}{n}}$. Tum vero etiam inuenimus cafu $x = \infty$ valorem huius formulae effe $= 2P$.

II. Secundo loco probe notari oportet, exponentem p neceffario minorem effe debere quam exponentem n, quia alioquin fractio foret fpuria, et variabilis x in numeratore tot vel plures dimenfiones effet habitura quam in denominatore. Quoties autem hoc euenit, integrali praeter partes, quas per refolutiolutionem in fractiones partiales ſumus nacti, quantitas quaedam integra adiici debet, id quod in noſtra ſolutione non eſt factum, quamobrem tales caſus hinc prorſus excludi conuenit. Ceterum quolibet caſu has partes integras facile erit adiicere ad partes quas nobis noſtra methodus ſuppeditabit.

III. Ex ipſa ſolutione, quam dedimus, perſpicuum eſt exponentem p neceſſario integrum ſtatui debere, quia alias operationes ibi exhibitae locum habere non poſſent; vnde eo magis mirum videbitur, quod concluſiones inuentae ſubſiſtere queant, etiamſi iſte exponens p fuerit numerus fractus quicunque, dummodo minor quam n, propterea quod hos caſus ſemper ad exponentes integros reducere licet. Ad hoc oſtendendum ponamus eſſe $p = \frac{q}{\lambda}$, atque forma noſtra, poſito $x = z^{\lambda}$, reducetur ad hanc formam: $\lambda \int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^{q} + z^{-q}}{z^{\lambda n} - 2 \operatorname{cof} \theta + z^{-\lambda n}}$, vbi cum omnes exponentes ſint integri, ac pro terminis integrationis, qui erant $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$, etiam fiat $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$, pro $z = 1$ valor integralis erit $\frac{\lambda \pi \operatorname{fin.} \frac{q}{\lambda n}(\pi - \theta)}{\lambda n \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \frac{q \pi}{\lambda n}}$, qui, reſtituto loco $\frac{q}{\lambda}$ valore p, abit in hunc: $\frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \frac{p \pi}{n}}$, quae expreſſio cum ſuperiore prorſus congruit. Atque hinc intelligitur, quominus etiam exponenti p valores irrationales tribuantur, dumne ſuperent exponentem n, ſemper hoc euenire debere.

IV. Hic iam quaeſtio oritur maximi momenti, vtrum etiam exponenti p dare liceat valores imaginarios nec ne? Hoc autem affirmandum videtur, quandoquidem imaginaria certe non ſint maiora quam n; vnde concludimus, dummodo valor ipſius p ita capiatur imaginarius, vt ipſa formula differentialis ma-

maneat realis, tum etiam conclusiones nostras veritati consentaneas esse mansuras. Hoc autem euenit, si statuamus $p = q\sqrt{-1}$; tum enim, cum in genere sit $e^{\Phi\sqrt{-1}} + e^{-\Phi\sqrt{-1}} = 2 \cos.\Phi$, quia nostro casu est $\Phi = q\, l\, x$, ipsa formula integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2 \cos.\, q\, l\, x}{x^n - 2 \cos.\theta + x^{-n}}.$$

Nunc igitur videamus quamnam formam nostrum integrale casu $x = 1$ sit recepturum, et quoniam sinus angulorum imaginariorum sunt etiam imaginarii, quandoquidem

$$e^{\Phi\sqrt{-1}} - e^{-\Phi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{-1}} \sin.\Phi,$$

loco Φ scribamus $\psi\sqrt{-1}$, eritque

$$\sin.\psi\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^{-\psi} - e^{+\psi}),$$

vnde in forma integrali erit $\frac{p}{n} = \frac{q\sqrt{-1}}{n}$, ideoque loco ψ scribamus $\frac{q}{n}(\pi - \theta)$ pro numeratore, et $\frac{q\pi}{n}$ pro denominatore, ex quo valor integralis ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus erit

$$\frac{\pi}{n \sin.\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}.$$

Hinc igitur formemus sequens Theorema notatu dignissimum:

Quodsi ista formula integralis:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos.\, q\, l\, x}{x^n - 2 \cos.\theta + x^{-n}},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendatur, eius volor semper erit* $= \dfrac{\pi}{2 n \sin.\theta} \cdot \dfrac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$. *Sin autem integrale extendatur ab* $x = 0$ $x = \infty$, *valor prodibit duplo maior.*

Hoc

Hoc theorema vtique eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet, eius veritatem directe demonstrandi.

V. Reuertamur autem ad formam integralem primo expositam, et quoniam numerator duabus constat partibus x^p et x^{-p}, vnde summa integralium pro $x = 1$ inuenta est $= P$, at pro casu $x = \infty$ duplo maior $= 2P$, hic maxime notatu dignum occurrit, quod pro termino $x = \infty$ vtraque pars numeratoris eundem producat valorem $= P$. Semper enim erit, integrale ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extendendo,

$$\int \frac{\partial x}{x} \frac{x^p}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}} = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{-p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}} = P.$$

Ad hoc ostendendum ponamus pro posteriore formula $x = \frac{1}{z}$, eaque induet hanc formam:

$$-\int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^{-p} + z^{+p}}{z^{-n} - 2\cos.\theta + z^n},$$

quae cum sit priori formae prorsus similis, solo signo — excepto, eius valor a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$, negatiue sumtus, primae formulae erit aequalis. Cum autem sit $z = \frac{1}{x}$, isti termini integralis erunt ab $x = \infty$ vsque ad $x = 0$, qui ergo si inuertantur, etiam signum integralis erit mutandum, sicque ipsi priori formulae aequale euadet; quare cum ambae formulae coniunctae summam habeant $= 2P$, vtriusque seorsim sumtae valor erit $= P$, vnde deducitur sequens theorema notatu pariter dignissimum:

Istius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{\pm p}}{x^n - 2\cos.\theta + x^{-n}}$ *valor a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = \infty$ *extensus semper est*

$$= P = \frac{\pi \sin.\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin.\theta \sin.\frac{p\pi}{n}},$$

Euidens

Euidens autem eſt hanc aequalitatem pro caſu $x = 1$, neutiquam locum habere poſſe.

VI. Quoniam in noſtra formula differentiali tantum occurrit terminus $2 \operatorname{cof.} \theta$, cuius valor idem manet, etiamſi pro θ ſumeremus $\theta \pm 2 i \pi$, maxime hic mirum videri debet, quod tum valor integralis maxime diuerſus ſit prodituruś, ſcilicet $= \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p}{n} (\pi - \theta \pm 2 i \pi)}{n \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \frac{p \pi}{n}}$, vnde merito quaeritur, quisnam horum valorum veritati ſit conformis, ad quod certe nihil aliud reſponderi poteſt, niſi quod omnes veritati aeque conſentanei ſint cenſendi, id quod eo minus mirum videri debet, quod omnes huiusmodi formulae integrales reuera ſunt functiones multiformes, atque adeo infinitiformes, id quod ex hoc exemplo ſimpliciſſimo: $\int \frac{\partial x}{1 + x x}$ intelligi poteſt. Cum enim eius integrale exhibeat arcum circuli cuius tangens eſt x, tales autem arcus innumerabiles dentur, quorum eadem ſit tangens $= x$, neceſſe eſt, vt omnes aeque iu hac forma integrali contineantur. Quin etiam in noſtro valore inuento P loco π quoque ſcribere licet $\pi + 2 i \pi$, eiusque valor nihilominus cum veritate conſiſtere poterit. Verum in huiusmodi integrationibus perpetuo valores minimi deſiderari ſolent, hocque modo omnis difficultas e medio eſt ſublata.

VII. Deinde in Analyſi ſupra adhibita ſuppoſuimus omnes factores denominatoris inter ſe eſſe inaequales, id quod vtique ſemper euenit, niſi ſit $\operatorname{cof.} \theta = \pm 1$, quippe quibus caſibus denominator quadratum inuoluit: fit enim is

$$= x^{-n} (x^n \pm 1)^2;$$

ex quo patet omnes factores $x^n \pm 1$ bis occurrere debere. Hoc incommodum etiam innuitur per ipſam noſtram formulam P, quae

quae casu $\theta = 0$ valorem indicat infinitum. Verum posito $\theta = \pi$, singulare phaenomenon se offert, dum formulae pro P inuentae tam numerator quam denominator euanescunt, atque adeo fractio determinatum nanciscitur valorem. Ponamus enim $\theta = \pi - \omega$, existente ω infinite paruo, eritque $\sin.\theta = \sin.\omega = \omega$; at ob $\pi - \theta = \omega$, in numeratore habebimus $\sin.\frac{p\omega}{n} = \frac{p\omega}{n}$, vnde valor ipsius P resultat $\frac{\pi p}{nn\sin.\frac{p\pi}{n}}$, qui cum penitus sit determinatus, nullum plane dubium superesse potest, quin cum veritate conspiret, vnde sequens enascitur Theorema maxime memorabile:

Theorema.

Proposita formula differentiali

$$\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 1 + x^{-n}} = \frac{x^{n-1}\partial x(x^p + x^{-p})}{(x^n+1)^2},$$

si eius integrale a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendatur, eius valor semper erit* $\frac{\pi p}{nn\sin.\frac{p\pi}{n}}$; *sin autem vsque ad terminum* $x = \infty$ *extendatur, eius valor erit duplo maior* $= \frac{2\pi p}{nn\sin.\frac{p\pi}{n}}$.

Demonstratio huius Theorematis directa.

Formula ista integralis resoluatur sequenti modo:

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^{n+p}+x^{n-p}}{(1+x^n)^2} = \frac{Q}{1+x^n} + \int\frac{\partial x}{x}\,\frac{R}{1+x^n}.$$

Sumantur igitur differentialia simulque ducantur in $\frac{x}{\partial x}$, positoque $\partial Q' = Q\,\partial x$, orietur ista aequatio:

$$\frac{x^{n+p}+x^{n-p}}{(1+x^n)^2} = \frac{Q'x}{1+x^n} - \frac{nQx^n}{(1+x^n)^2} + \frac{R}{1+x^n},$$

quae per $1 + x^n$ multiplicata hoc modo repraesentetur:

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p} + n\,Q\,x^n}{1 + x^n} = Q'x + R,$$

vbi iam Q ita accipi debet, vt illa fractio ad integrum reuocetur. Facile autem patet, hoc fieri statuendo

$$nQ = -x^p + x^{n-p},$$

tum enim illa fractio fiet

$$\frac{x^{n-p} + x^{2n-p}}{1 + x^n} = x^{n-p},$$

ita vt nunc habeamus $x^{n-p} = Q'x + R$. Cum igitur sit $Q = \frac{x^{n-p} - x^p}{n}$, erit

$$Q'x = \frac{(n-p)\,x^{n-p} - p\,x^p}{n},$$

hincque colligitur $R = \frac{p}{n}(x^{n-p} + x^p)$, quocirca formula integralis proposita reducta est ad hanc formam:

$$\frac{x^{n-p} - x^p}{n(1 + x^n)} + \frac{p}{n}\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^{n-p} + x^p}{1 + x^n},$$

quod integrale ita est sumendum, vt euanescat posito $x = 0$. Nunc igitur statuamus $x = 1$, ac prior pars absoluta euanescit, formulae autem integralis valor, per ea quae dudum sunt inuenta, prodit $\frac{p}{n}\cdot\frac{\pi}{n\,\text{sin.}\,\frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi p}{n\,n\,\text{sin.}\,\frac{p\pi}{n}}$, qui ergo cum ante inuento perfecte congruit.

VIII. Tribuatur nunc etiam in hac postrema forma exponenti p valor imaginarius, ponendo $p = q\sqrt{-1}$, et cum, vt ante vidimus, hinc fiat $x^p + x^{-p} = 2\,\text{cos.}\,q\,l\,x$, formula integralis proposita erit $= 2\int\frac{\partial x}{x}\,\frac{x^n\,\text{cos.}\,q\,l\,x}{(1 + x^n)^2}$. Pro eius

valore

valore autem iam ante vidimus fore

$$\text{fin.}\,\frac{\pi q\sqrt{-1}}{n}=\frac{e^{-\frac{\pi q}{n}}-e^{+\frac{\pi q}{n}}}{2\sqrt{-1}},$$

quamobrem valor noſtrae formulae, ab $x=0$ ad $x=1$ extenſus, erit $\frac{2\pi q}{nn\left(e^{\frac{\pi q}{n}}-e^{-\frac{\pi q}{n}}\right)}$, vnde deducimus ſequens theorema omni attentione dignum.

Theorema.

Si valor iſtius formulae integralis: $\int\frac{x^{n-1}\partial x(x^{p}+x^{-p})}{(1+x^{n})^{2}}$, *a termino* $x=0$ *vsque* $x=1$ *extendatur, is ſemper aequabitur huic formulae:* $\frac{\pi q}{nn\left(e^{\frac{\pi q}{n}}-e^{\frac{\pi q}{n}}\right)}$. Cuius autem Theorematis demonſtratio ex principiis iam cognitis vix elici poſſe videtur.

IX. Praeterea etiam perſpicuum eſt, methodum, qua vſi ſumus ad noſtram formulam integrandam, ſubſiſtere non poſſe, niſi terminus medius denominatoris binario ſit minor, quam ob cauſſam eum hac forma $2\,\text{coſ.}\,\theta$ expreſſimus. Quamobrem hinc oritur quaeſtio maximi momenti: vtrum noſtrae concluſiones etiamnunc valeant, ſi terminus ille medius binario maior acciperetur, ſiue ſi angulus θ foret imaginarius, nec ne? Verum etiam hoc caſu nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin formula noſtra finalis etiamnunc veritati conſentanea ſit futura. Ante omnia autem hic eſt obſeruandum, illi termino medio $2\,\text{coſ.}\,\theta$ valorem negatiuum tribui conuenire, quia alioquin ipſe denominator in nihilum abiret, dum quantitas noſtra variabilis x a termino 0 vsque ad 1 augetur. Hanc ob rem ſtatuamus angulum $\theta=\pi-\eta$, et valor noſter integralis erit

$\int\partial x$

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \operatorname{cof.} \eta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p\eta}{n}}{n \operatorname{fin.} \eta \operatorname{fin.} \frac{\pi p}{n}}.$$

In hac igitur forma faciamus angulum η imaginarium, ponendo $\eta = \Phi \sqrt{-1}$, eritque, per ea quae iam ſupra obſeruauimus, $2 \operatorname{cof.} \Phi \sqrt{-1} = e^{\Phi} + e^{-\Phi}$, ita vt iam noſter denominator ſit

$$x^n + e^{\Phi} + e^{-\Phi} + x^{-n} = \frac{1}{x^n}(x^n + e^{\Phi})(x^n + e^{-\Phi}),$$

quem idcirco ſtatim in duos factores reales formae $x + k$ reſoluere licet; tum vero fiet

$$\operatorname{fin.} \theta = \operatorname{fin.} \Phi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\Phi} - e^{+\Phi}}{2\sqrt{-1}},$$

ſimilique modo erit

$$\operatorname{fin.} \tfrac{p}{n} \eta = \operatorname{fin.} \tfrac{p}{n} \Phi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}}}{2\sqrt{-1}},$$

vnde formula noſtra integralis emergit realis

$$= \frac{\pi \left(e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}}\right)}{n\left(e^{-\Phi} - e^{+\Phi}\right) \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n}}.$$

Statuamus autem hic breuitatis gratia $e^{\Phi} = f$, vt ſit $e^{-\Phi} = \frac{1}{f}$, atque noſtra formula integralis ſequentem induet formam:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi\left(f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}}\right)}{n(f - f^{-1}) \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n}},$$

id quod tanquam Theorema omni attentione dignum ſpectari poteſt; vbi per ſe intelligitur, valorem eiusdem integralis, vsque ad $x = \infty$ extenſum, fore duplo maiorem.

X. Quodſi iam in hac forma etiam exponenti p valorem imaginarium tribuamus, pariter nullo modo dubitari poterit, it, quin conclusio nostra vera sit mansura. Ponamus igitur $p = q\sqrt{-1}$, eritque vt ante $x^p + x^{-p} = 2 \operatorname{cos.} q\, l\, x$; tum vero erit $\operatorname{sin.} \frac{p\pi}{n} = \frac{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}{2\sqrt{-1}}$, pro integralis autem numeratore erit $f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}} = 2\sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{q}{n}\, l f$. His igitur valoribus substitutis sequens nanciscimur

Theorema.

Valor istius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\operatorname{cos.} q\, l\, x}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}}$, *a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extensus, semper aequabitur formulae* $\frac{2\pi \operatorname{sin.} \frac{q}{n}\, l f}{n(f - f^{-1})(e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}})}$.

XI. Deinde iam pridem obseruaui, omnia huiusmodi integralia satis commode per series infinitas exprimi posse. Cum enim ista fractio:

$$\frac{x^p}{x^n - 2 \operatorname{cos.} \theta + x^{-n}} = \frac{x^{n+p}}{x^{2n} - 2x^n \operatorname{cos.} \theta + 1},$$

resoluatur in hanc seriem:

$$\frac{1}{\operatorname{sin.} \theta} (x^{n+p} \operatorname{sin.} \theta + x^{2n+p} \operatorname{sin.} 2\theta + x^{3n+p} \operatorname{sin.} 3\theta \text{ etc.})$$

integrale istud: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^{2n} - 2x^n \operatorname{cos.} \theta + 1}$, a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensum, aequabitur huic seriei infinitae:

$$\frac{1}{\operatorname{sin.} \theta} \left(\frac{\operatorname{sin.} \theta}{n+p} + \frac{\operatorname{sin.} 2\theta}{2n+p} + \frac{\operatorname{sin.} 3\theta}{3n+p} + \frac{\operatorname{sin.} 4\theta}{4n+p} + \text{etc.}\right)$$

Hinc ergo, si p negatiue caperemus, tum formula nostra principalis $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \operatorname{cos.} \theta + x^{-n}}$, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, semper aequabitur huic seriei infinitae geminatae:

$$\frac{1}{\sin.\theta}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin.\theta}{n+p}+\frac{\sin.2\theta}{2n+p}+\frac{\sin.3\theta}{3n+p}+\frac{\sin.4\theta}{4n+p}\text{ etc.}\\ +\frac{\sin.\theta}{n-p}+\frac{\sin.2\theta}{2n-p}+\frac{\sin.3\theta}{3n-p}+\frac{\sin.4\theta}{4n-p}\text{ etc.}\end{array}\right\},$$

quae binis homologis coniungendis contrahitur in hanc seriem:

$$\frac{2n}{\sin.\theta}\left(\frac{\sin.\theta}{nn-pp}+\frac{2\sin.2\theta}{4nn-pp}+\frac{3\sin.3\theta}{9nn-pp}+\frac{4\sin.4\theta}{16nn-pp}+\text{etc.}\right)$$

XII. Hinc iam manifesto pro casu, quo ponitur $p=q\surd-1$, ista series infinita exoritur:

$$\frac{2n}{\sin.\theta}\left(\frac{\sin.\theta}{nn+qq}+\frac{2\sin.2\theta}{4nn+qq}+\frac{3\sin.3\theta}{9nn+qq}+\frac{4\sin.4\theta}{16nn+qq}+\text{etc.}\right)$$

quae ergo exprimit valorem huius formulae integralis:

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{\cos.\,q\,l\,x}{x^n-2\cos.\theta+x^{-n}},$$

scilicet ab $x=0$ ad $x=1$ extensae, ita vt istius seriei summa finito modo expressa sit etiam

$$\frac{\pi}{n\sin.\theta}\cdot\left(\frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)}-e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}}-e^{+\frac{q\pi}{n}}}\right).$$

Quin etiam facile intelligitur hic quoque angulum θ imaginarium accipi posse. Vidimus enim posito $\theta=\Phi\surd-1$ fore

$$\sin.\theta=\frac{e^{-\Phi}-e^{+\Phi}}{2\surd-1},\text{ hincque in genere}$$

$$\sin.\lambda\theta=\frac{e^{-\lambda\Phi}-e^{+\lambda\Phi}}{2\surd-1}.$$

Quare si statuamus $e^{\Phi}=f$, erit $\frac{\sin.\lambda\theta}{\sin.\theta}=\frac{f^{\lambda}-f^{-\lambda}}{f-\frac{1}{f}}$, vnde series illa satis concinnam formam accipiet.

XII.

XII. Denique operationes, quibus in integratione nostrae formulae sumus vsi, consistere nequeunt, nisi exponens n fuerit numerus integer. Interim tamen valor integralis, quem inuenimus pro casu vel $x = 1$ vel $x = \infty$, veritati conformis deprehenditur, non solum quando pro n numerus fractus quicunque sed etiam adeo imaginarius accipitur, quorum prius facile ostenditur. Sit enim $n = \frac{m}{\lambda}$, ac ponatur $x = y^\lambda$, atque ob $\frac{\partial x}{x} = \frac{\lambda \partial y}{y}$, orietur haec forma integralis exponentibus integris contenta: $\int \frac{\lambda \partial y}{y} \cdot \frac{y^{\lambda p} + y^{-\lambda p}}{y^m - 2 \operatorname{cos}. \theta + y^{-m}}$, cuius ergo valor casu $x = 1$ debet esse secundum formulam inuentam

$$\frac{\lambda \pi}{m} \cdot \frac{\operatorname{sin}. \frac{\lambda p}{m} (\pi - \theta)}{\operatorname{sin}. \theta \operatorname{sin}. \frac{\lambda p \pi}{m}},$$

qui, si iam loco m valor λn restituatur, manifesto abit in ipsam nostram formulam supra inuentam: $\frac{\pi}{n} \frac{\operatorname{sin}. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{\operatorname{sin}. \theta \operatorname{sin}. \frac{p\pi}{n}}$. Hinc autem nulli amplius dubio relinquitur, quin veritas haec subsistat, etiamsi n fuerit numerus imaginarius. Ponamus igitur $n = m \sqrt{-1}$, et formula integralis reducetur ad hanc formam: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{2 \operatorname{cos}. m l x - 2 \operatorname{cos}. \theta}$, cuius ergo valor casu $x = 1$ certe erit $\frac{p}{m \sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\frac{p}{m}(\pi - \theta)} - e^{-\frac{p}{m}(\pi - \theta)}}{\operatorname{sin}. \theta \, (e^{\frac{\pi p}{m}} - e^{-\frac{\pi p}{m}})}$, vbi mirum videbitur istum valorem semper esse imaginarium, licet ipsa formula differentialis, dum variabilis x, a termino 0 vsque ad terminum $x = 1$, maneat realis, id quod merito maxime videtur paradoxum. Interim tamen non desunt casus, quibus valor integralis formulae differentialis realis manifesto euadit imaginarius, id quod in ista formula simpliciori $\int \frac{\partial x}{x \operatorname{cos}. m l x}$ ostendisse suffi-

ſufficiet, quae vtique, dum x a o ad 1 augetur, conſtanter manet realis. Ad hanc ergo formulam integrandam ſtatuamus $l\,x = -z$, vbi notetur, dum x a o vsque ad 1 progreditur, tum quantitatem z ab ∞ vsque ad o decreſcere. Nunc igitur formula noſtra integralis erit $\int \frac{-\partial z}{cof.\, m\, z}$, cum vero conſtet eſſe $\int \frac{\partial \Phi}{fin.\, \Phi} = l$ tang. $\frac{1}{2}\Phi$, ſumamus $\Phi = 90^{\circ} - m\,z$, eritque $\partial \Phi = -m\,\partial z$, hincque

$$\int \frac{-m\,\partial z}{cof.\, m\, z} = + l \text{ tang. } (45^{\circ} - \tfrac{1}{2} m\, z),$$

quod integrale manifeſto euaneſcit pro termino $z = 0$, dum autem ab hoc termino quantitas z in infinitum vsque augetur, infinities tangens huius anguli fiet negatiua, eiusque logarithmus propterea imaginarius, vnde non amplius mirabimur, quod formulae differentialis realis integrale euadere poſſit certis caſibus imaginarium.

XIII. Hoc igitur modo euictum eſt formulae noſtrae differentialis propoſitae $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\, cof.\, \theta + x^{-n}}$, integrale aſſignatum a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ ſemper cum veritate conſiſtere, quicunque valores ternis litteris n, p et θ, tribuantur, ſiue integri, ſiue fracti, ſiue etiam imaginarii. Interim tamen dantur caſus iam initio indicati, quibus iſti valores integrales a veritate aberrabunt, quippe quod ſemper vſu venire debet, quoties exponens p maior eſt exponente n, quam ob cauſſam ſedulo excludere debemus omnes caſus, quibus formula $p - n$ euadit realis et poſitiua. His autem exceptis variae formulae, ad quas hic ſumus perducti, ita ſunt comparatae, vt maxima attentione dignae videantur, ſimulque non contemnenda incrementa Scientiae analyticae promittant.

DE

DE SVMMO VSV CALCVLI IMAGINARIORVM IN ANALYSI.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

Quanta incrementa Calculo Imaginariorum per vniuersam Analysin accepta sint referenda, nunc quidem amplius nemo dubitabit. Nuper equidem conatus sum integrationem formularum rationalium a Calculo Imaginariorum penitus liberare; veruntamen hoc negotium in casibus, vbi denominator plures habet factores inter se aequales, minus feliciter successit. Quin etiam non ita pridem in tales formulas integrales incidi, quae quomodo sine subsidio Imaginariorum tractari queant, nullo adhuc modo perspicio. Cum enim (*) ostendissem, huius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}}$, valorem a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensum esse $\frac{\pi \sin. \frac{\theta p}{n}}{n \sin. \theta \sin. \frac{\pi p}{n}}$, denotante π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$, inde facile deducitur haec conclusio maxime memorabilis: quod huius formulae integralis

(*) Vid. Dissertationem praecedentem pag. 20.

gralis: $\int \frac{\partial x}{x\, l\, x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}}$ valor, pariter a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſus, aequetur iſti integrali:

$$\frac{\pi}{n \operatorname{fin.} \theta} \int \frac{\partial p \operatorname{fin.} \frac{\theta p}{n}}{\operatorname{fin.} \frac{\pi p}{n}},$$

vbi ſcilicet quantitas p tanquam variabilis ſpectatur, et integrale ita capitur, vt euaneſcat poſito $p = 0$. Quodſi ergo nunc faciamus $\frac{p}{n} = \Phi$, integrari oportet huiusmodi formulam differentialem: $\frac{\partial \Phi \operatorname{fin.} m \Phi}{\operatorname{fin.} n \Phi}$. Quemadmodum igitur iſta integratio auxilio Imaginariorum tractari debeat, hic ſum oſtenſurus.

De integratione formulae

$$\int \frac{\partial \Phi \operatorname{fin.} m \Phi}{\operatorname{fin.} n \Phi}.$$

§. 1. Ante omnia hanc formulam ad quantitates algebraicas ordinarias reuocari conuenit, id quod commodius quam per Imaginaria praeſtari nequit. Hunc in finem ſtatuamus breuitatis gratia $t = \operatorname{cof.} \Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \Phi$ et $u = \operatorname{cof.} \Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \Phi$, ita vt ſit $t u = 1$; tum vero erit

$$\partial t = - \partial \Phi (\operatorname{fin.} \Phi - \sqrt{-1} \operatorname{cof.} \Phi) \text{ ideoque}$$
$$\partial t \sqrt{-1} = - \partial \Phi (\operatorname{cof.} \Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \Phi) = - t \partial \Phi,$$

vnde ergo fiet

$$\partial \Phi = - \frac{\partial t \sqrt{-1}}{t} = \frac{\partial t}{t \sqrt{-1}}.$$

§. 2. His autem formulis conſtitutis, ex elementis Calculi Imaginariorum conſtat eſſe

$$t^\lambda = \operatorname{cof.} \lambda \Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \lambda \Phi \text{ et}$$
$$u^\lambda = \operatorname{cof.} \lambda \Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \lambda \Phi;$$

vnde

vnde ergo colligitur $t^\lambda - u^\lambda = 2\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\lambda\Phi$, ideoque

$$\text{fin.}\,\lambda\Phi = \frac{t^\lambda - u^\lambda}{2\sqrt{-1}}.$$

Hinc ergo fi loco λ fcribamus numeros m et n, erit

$$\frac{\text{fin.}\,m\Phi}{\text{fin.}\,n\Phi} = \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n},$$

quocirca, fi integrale quaefitum littera S defignemus, vt fit $S = \int \frac{\partial\Phi\,\text{fin.}\,m\Phi}{\text{fin.}\,n\Phi}$, facta fubftitutione nunc habebimus

$$\partial S = \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^m - u^m}{t^n - u^n}.$$

Quia autem eft $u = \frac{1}{t} = t^{-1}$, formula propofita ad fpeciem confuetam, folam variabilem t inuoluentem, eft reducta, cum fit

$$\partial S\sqrt{-1} = \frac{\partial t}{t}\,\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}},$$

cuius formulae adeo integralis iam paffim euoluta reperitur. Hic autem probe meminiffe oportet, ipfam quantitatem t non effe realem, cum fit $t = \text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\Phi$.

§. 3. Manifeftum hic eft ambos numeros m et n femper tanquam integros fpectari poffe, cum iis ratio indicetur, quam ambo anguli $m\Phi$ et $n\Phi$ inter fe tenent. Hic igitur ante omnia difpiciendum erit, vtrum exponens m maior minorue fit exponente n; quandoquidem notum eft, fi fuerit $m > n$, fractionem noftram effe fpuriam, atque partes integras ante ex ea elici debere quam integratio fufcipiatur. Hos ergo cafus hic primum euolui conueniet. Sit igitur primo $m = n + \lambda$, ita tamen vt fit $\lambda < n$, ac facile patebit, fractionem $\frac{t^{n+\lambda} - t^{-(n+\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$ continere partem integram $t^\lambda + t^{-\lambda}$, qua ab ifta fractione fub-

lata

lata remanet $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$, quae fractio non amplius est spuria. Ex parte integra autem ducta in $\frac{\partial t}{t}$ oritur integrale $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{\lambda}$. At vero est $t^\lambda - t^{-\lambda} = t^\lambda - u^\lambda = 2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\lambda\Phi$, quod per $\sqrt{-1}$ diuisum dat partem integralis hinc oriundam $= \frac{2\,\text{sin.}\,\lambda\Phi}{\lambda}$.

§. 4. Sin autem fuerit $m > 2n$, siue $m = 2n + \lambda$, tum fractio nostra $\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$ hanc continebit partem integram: $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$, qua ablata remanet adhuc ista fractio: $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae iam est genuina ob $\lambda < n$. At vero ex parte integra ducta in $\frac{\partial t}{t}$, oritur integrando

$$\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{n+\lambda} = \frac{t^{n+\lambda} - u^{n+\lambda}}{n+\lambda},$$

cuius valor est: $\frac{2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}$, qui per $\sqrt{-1}$ diuisus praebet partem integralis hinc natam $= \frac{2\,\text{sin.}\,(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}$.

§. 5. Simili modo si fuerit $m > 3n$, ac ponatur $m = 3n + \lambda$, fractio nostra erit $\frac{t^{3n+\lambda} - t^{-3n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae continebit partem integram $t^{2n+\lambda} + t^{-2n-\lambda}$; hac autem ablata remanebit adhuc fractio $\frac{t^{n+\lambda} - t^{-n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$; quae etiamnunc est spuria et continet partem integram $t^\lambda + t^{-\lambda}$, qua ablata demum remanet fractio genuina $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$. Ex partibus autem integris oriuntur hae partes integralis: $\frac{2\,\text{sin.}\,(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,\text{sin.}\,\lambda\Phi}{\lambda}$.

§. 6. Ponamus quoque esse $m > 4n$, ideoque $m = 4n + \lambda$, et fractio nostra erit $\frac{t^{4n+\lambda} - t^{-4n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae statim continet partem integram $t^{3n+\lambda} + t^{-3n-\lambda}$, hac autem ablata remanet adhuc ista fractio: $\frac{t^{2n+\lambda} - t^{-2n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae denuo continet partem integram $t^{n+\lambda} + t^{-n-\lambda}$, qua subtracta tandem remanet ista fractio genuina: $\frac{t^\lambda - t^{-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$. Iam vero ex partibus integris obtinentur pro integrali S istae partes:

$$\frac{2\,\mathit{sin.}\,(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2\,\mathit{sin.}\,(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda}.$$

§. 7. Sit porro etiam $m > 5n$, siue $m = 5n + \lambda$, ac nostra fractio $\frac{t^{5n+\lambda} - t^{-5n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$ primo continebit partem integram $t^{4n+\lambda} + t^{-4n-\lambda}$, qua ablata remanet adhuc ista fractio: $\frac{t^{3n+\lambda} - t^{-3n-\lambda}}{t^n - t^{-n}}$, quae per antecedentia continet adhuc duas partes integras, scilicet $t^{2n+\lambda} + t^{-2n-\lambda}$ et $t^\lambda + t^{-\lambda}$, quibus ablatis remanet tandem ista fractio genuina: $\frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}}$.

§. 8. Ex his casibus iam satis perspicitur, quomodo, si exponens n adhuc maior accipiatur, partes integrae in integrale S ingredientes se sint habiturae, quas idcirco hic coniunctim aspectui exponamus.

I. Si $m = n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi\, \mathit{sin.}\,(n+\lambda)\Phi}{\mathit{sin.}\, n\,\Phi} =$

$$\frac{2\,\mathit{sin.}\,\lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^n - t^{-n}};$$

II. Si $m = 2n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, \text{fin.} (2n+\lambda)\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,\text{fin.}(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

III. Si $m = 3n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, \text{fin.} (3n+\lambda)\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,\text{fin.}(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}\,\lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^{n} - t^{-n}};$$

IV. Si $m = 4n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, \text{fin.} (4n+\lambda)\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,\text{fin.}(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

V. Si $m = 5n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, \text{fin.} (5n+\lambda)\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,\text{fin.}(4n+\lambda)\Phi}{4n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}(2n+\lambda)\Phi}{2n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}\,\lambda\Phi}{\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{n-\lambda} - t^{-(n-\lambda)}}{t^{n} - t^{-n}};$$

VI. Si $m = 6n + \lambda$, erit $\int \frac{\partial \Phi \, \text{fin.} (6n+\lambda)\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi} =$

$$\frac{2\,\text{fin.}(5n+\lambda)\Phi}{5n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}(3n+\lambda)\Phi}{3n+\lambda} + \frac{2\,\text{fin.}(n+\lambda)\Phi}{n+\lambda} + \int \frac{\partial t}{t\sqrt{-1}} \cdot \frac{t^{\lambda} - t^{-\lambda}}{t^{n} - t^{-n}};$$

etc. etc.

§. 9. His igitur caſibus, quibus $m > n$, feliciſſimo cum ſucceſſu expeditis, totum negotium reducitur ad integrationem formulae $\frac{\partial \Phi \, \text{fin.}\, m\Phi}{\text{fin.}\, n\Phi}$, pro caſibus quibus eſt $m < n$; quandoquidem ex modo allatis manifeſtum eſt, quomodo illi caſus ad hos facillime reducuntur. Tum igitur ope noſtrae ſubſtitutionis $t = \text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\Phi$ peruenitur ad hanc formulam:

$$S\sqrt{-1} = \int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^{m} - t^{-m}}{t^{n} - t^{-n}},$$

cuius ergo integrationem data opera inſtituamus.

Inue-

Inueſtigatio integralis

$$\int \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$$

existente $m < n$.

§. 10. Hic ante omnia cuncti factores trinomiales noſtri denominatoris $t^n - t^{-n}$ indagari debebunt, quorum ſingulorum forma ita exhiberi poteſt: $t^1 - 2 \cos. \omega + t^{-1}$, vbi angulum ω ita definiri oportet, vt poſito $t^1 - 2 \cos. \omega + t^{-1} = 0$ ſimul ipſe denominator euaneſcat; tum autem exinde colligitur $t = \cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega$, vnde ſtatim patet fore

$$t^n = \cos. n\omega + \sqrt{-1} \sin. n\omega \text{ et}$$

$$t^{-n} = \cos. n\omega - \sqrt{-1} \sin. n\omega,$$

quamobrem noſter denominator reducetur ad hanc formam: $2\sqrt{-1} \sin. n\omega$, qui ergo valor nihilo debet aequari.

§. 11. Cum igitur debeat eſſe $\sin. n\omega = 0$, omnes valores, quos pro $n\omega$ accipere licet, erunt 0π, π, 2π, 3π, 4π, etc. vnde ipſius anguli ω valores erunt $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, etc. et in genere $\frac{i\pi}{n}$, denotante i numerum integrum quemcunque. Hinc igitur pro omnibus factoribus noſtri denominatoris videntur capi debere n horum valorum; verum manifeſtum eſt, quotcunque tales formulae $t^1 - 2\cos. \omega + t^{-1}$ in ſe inuicem multiplicentur, vltimum terminum nunquam prodire poſſe $-t^{-n}$. At vero hic meminiſſe oportet, quae circa huiusmodi integrationes in genere ſunt praecepta: ſcilicet talem factorem trinomialem $tt - 2t \cos. \omega + 1$, caſu quo $\omega = 0$, non factorem quadratum $(t-1)^2$, ſed tantum ſimplicem $t - 1$ innui, quod idem quoque euenit ſi $\omega = \pi$, tum enim quoque non factor quadratus $(t+1)^2$, ſed tantum ſimplex $t + 1$ eſt ſumendus, quare cum hi ipſi caſus inter valores ipſius ω occurrant, neceſſe eſt vt numerus

ho-

horum factorum vnitate augeatur. Hic autem commode vsu venit, vt isti casus ex valoribus $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ oriundi e medio tollantur.

§. 12. Cum igitur fractionem nostram $\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}}$ in meras fractiones simplices resolui oporteat, quarum denominatores sint $t^1 - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1}$, pro vnaquaque harum fractionum statuamus

$$\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}} = \frac{\Delta}{t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1}} + R$$

vbi R complectatur omnes reliquas fractiones, et nunc vtrinque multiplicemus per $t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1}$, vt prodeat

$$\frac{(t^m - t^{-m})(t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1})}{t^n - t^{-n}} = \Delta + R(t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1});$$

vnde si iam ponamus $t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1} = 0$, quod fit sumendo $t = \text{cos.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\omega$, hinc colligitur numerator nostrae fractionis

$$\Delta = (t^m - t^{-m})\frac{t - 2\,\text{cos.}\,\omega + t^{-1}}{t^n - t^{-n}}.$$

Tum autem manifestum est in hac fractione, ad quam sumus deducti, hoc casu tam numeratorem quam denominatorem in nihilum abire, vnde iuxta regulam notissimam eorum loco sua scribamus differentialia, atque ista fractio induet hanc formam: $\frac{t^1 - t^{-1}}{n(t^n + t^{-n})}$, vbi manifesto erit $t - t^{-1} = 2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\omega$, at $t^n + t^{-n} = 2\,\text{cos.}\,n\omega$, ita vt nunc valor huius fractionis futurus sit $\frac{\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\omega}{n\,\text{cos.}\,n\omega}$, qui ductus in $t^m - t^{-m} = 2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,m\omega$ dabit numeratorem nostrum quaesitum $\Delta = -\frac{2\,\text{sin.}\,\omega\,\text{sin.}\,m\omega}{n\,\text{cos.}\,n\omega}$.

Quia

Quia autem eſt ſin. $n\omega = 0$, ſemper erit vel coſ. $n\omega = 1$, vel coſ. $n\omega = -1$, provti, ſtatuendo in genere $\omega = \frac{i\pi}{n}$, numerus i fuerit vel par, vel impar.

§. 13. Inuenta igitur hac fractione: $-\frac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\omega}{n\,\text{coſ.}\,n\omega}$, ea in $\frac{\partial t}{t}$ multiplicetur et integretur, ſicque ad iſtam pertingimus formulam integralem:

$$-\frac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\omega}{n\,\text{coſ.}\,n\omega}\cdot\frac{\partial t}{t}\cdot\frac{1}{t-2\,\text{coſ.}\,\omega+t^{-1}},$$

cuius quidem integratio nulla amplius laborat difficultate: perduceret enim ad arcum circuli cuius tangens $= \frac{t\,\text{ſin.}\,\omega}{1-t\,\text{coſ.}\,\omega}$; verum quia ipſa quantitas t iam eſt imaginaria, hinc parum lucraremur, quoniam neceſſe foret iſtum arcum imaginarium ad quantitates reales reducere, ſiquidem conſtat, arcus imaginarios ad logarithmos reales reduci.

§. 14. Vt igitur hunc laborem euitemus, loco noſtrae variabilis t ipſum angulum Φ rurſus in calculum reuocemus, et quia iam vidimus eſſe $\frac{\partial t}{t} = \partial\Phi\sqrt{-1}$, tum vero $t+u = 2\,\text{coſ.}\,\Phi$, hiſce valoribus ſubſtitutis formula integranda erit $-\frac{\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\omega}{n\,\text{coſ.}\,n\omega}\cdot\frac{\partial\Phi\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\omega}$, quae formula per $\sqrt{-1}$ diuiſa praebet partem ipſius integralis quaeſiti S, ita vt ſit

$$S = -\frac{\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\omega}{n\,\text{coſ.}\,n\omega}\int\frac{\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\omega},$$

ſiquidem angulo ω ſucceſſiue omnes ſuos valores tribuamus; vbi per ſe manifeſtum eſt, in hac integratione angulum ω eſſe conſtantem ſolumque Φ variabilem.

§. 15. Ex coëfficiente huius formulae ſtatim patet, quod iam ſupra innuimus, ex valoribus ipſius ω primo et extremo, ſcilicet $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, partes integralis ſponte e me-

 dio

dio tolli, ita vt nunc sufficiat loco ω successiue substitui hos valores: $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, ... $\frac{(n-1)\pi}{n}$. Vbi recordandum, dum statuitur $\omega = \frac{i\pi}{n}$, quoties i fuerit numerus par, fore $\cos. n\omega = +1$; sin autem sit i numerus impar, tum fore $\cos. n\omega = -1$. Quibus obseruatis totum negotium reductum est ad integrationem huius formulae satis memorabilis: $\int \frac{\partial \Phi}{\cos. \Phi - \cos. \omega}$.

§. 16. Facile quidem foret istam formulam ad quantitates reales consuetas reuocare; interim tamen sequenti modo haec integratio facilius et elegantius absolui potest. Ponamus enim breuitatis gratia $\frac{\partial \Phi}{\cos. \Phi - \cos. \omega} = \partial s$, et secundum calculum angulorum iam satis vulgatum nouimus esse

$$\cos. \Phi - \cos. \omega = 2 \sin. \tfrac{\omega + \Phi}{2} . \sin. \tfrac{\omega - \Phi}{2},$$

sicque habebimus:

$$\partial s = \frac{\partial \Phi}{2 \sin. \frac{\omega + \Phi}{2} \sin. \frac{\omega - \Phi}{2}}, \text{ siue}$$

$$\frac{2 \partial s}{\partial \Phi} = \frac{1}{\sin. \frac{\omega + \Phi}{2} . \sin. \frac{\omega - \Phi}{2}},$$

quae fractio, quia denominator duobus constat factoribus, commode resolui potest in duas fractiones huiusmodi:

$$\frac{\alpha \cos. \frac{\omega + \Phi}{2}}{\sin. \frac{\omega + \Phi}{2}} + \frac{\beta \cos. \frac{\omega - \Phi}{2}}{\sin. \frac{\omega - \Phi}{2}},$$

vbi statim patet sumi debere $\beta = \alpha$, tum enim summa harum fractionum prodit $\frac{\alpha \sin. \omega}{\sin. \frac{\omega + \Phi}{2} \sin. \frac{\omega - \Phi}{2}}$, vnde $\alpha = \beta = \frac{1}{\sin. \omega}$. Hinc autem erit

$$\partial s = \frac{1}{2 \sin. \omega} . \left(\frac{\partial \Phi \cos. \frac{\omega + \Phi}{2}}{\sin. \frac{\omega + \Phi}{2}} + \frac{\partial \Phi \cos. \frac{\omega - \Phi}{2}}{\sin. \frac{\omega - \Phi}{2}} \right),$$

in

in quibus formulis numerator manifesto est differentiale denominatoris, vnde concludimus fore

$$s = \frac{1}{\text{fin. } \omega}\, l \frac{\text{fin. } \frac{\omega + \Phi}{2}}{\text{fin. } \frac{\omega - \Phi}{2}}.$$

§. 17. Inuento iam hoc integrali, in quo cardo totius inuestigationis versabatur, quilibet factor denominatoris in valorem integralem quaesitum S ductus suppeditat istam partem:

$$-\frac{\text{fin. } m\,\omega}{n \text{ cof. } n\,\omega} \cdot l \frac{\text{fin. } \frac{\omega + \Phi}{2}}{\text{fin. } \frac{\omega - \Phi}{2}},$$

vbi tantum opus est vt loco anguli ω successiue omnes eius valores debiti substituantur, tum enim aggregatum omnium harum formularum praebebit verum valorem integralis $S = \int \frac{\partial \Phi \text{ fin. } m\,\Phi}{\text{fin. } n\,\Phi}$.

§. 18. Quo autem totum integrale succinctius repraesentare valeamus, ponamus breuitatis gratia $\frac{\pi}{n} = 2\,\alpha$, ita vt valores ipsius ω futuri sint $2\,\alpha$, $4\,\alpha$, $6\,\alpha$, ... $2(n-1)\,\alpha$; tum vero sit $\Phi = 2\,\psi$, atque formulae integralis $\int \frac{2\,\partial \psi \text{ fin. } 2\,m\,\psi}{n \text{ fin. } 2\,n\,\psi}$ valor completus erit

$$\begin{aligned} S = & \frac{\text{fin. } 2\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } \alpha + \psi}{\text{fin. } \alpha - \psi} - \frac{\text{fin. } 4\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } 2\,\alpha + \psi}{\text{fin. } 2\,\alpha - \psi} \\ & + \frac{\text{fin. } 6\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } 3\,\alpha + \psi}{\text{fin. } 3\,\alpha - \psi} - \frac{\text{fin. } 8\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } 4\,\alpha + \psi}{\text{fin. } 4\,\alpha - \psi} \\ & + \frac{\text{fin. } 10\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } 5\,\alpha + \psi}{\text{fin. } 5\,\alpha - \psi} - \frac{\text{fin. } 12\,m\,\alpha}{n}\, l \frac{\text{fin. } 6\,\alpha + \psi}{\text{fin. } 6\,\alpha - \psi}, \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

donec horum membrorum numerus sit $n-1$. Haec autem formula tantum valet quando $m < n$: si enim fuerit $m > n$, iam ante ostendimus, cuiusmodi termini insuper debeant adiungi.

§. 19. Hic obseruandum est haec integralia ita esse sumta, vt euanescant posito $\Phi = 0$, quoniam hoc casu omnes

 loga-

logarithmi ad vnitatem referuntur. Deinde etiam euidens eſt, ſi angulus ψ augeatur vsque ad α, tum integrale iam in infinitum excreſcere; vnde patet hunc angulum non vltra iſtum terminum augeri conuenire. Verum etiam caſus initio memoratus, qui ad hanc formulam integralem ducit, non poſtulat vt iſte angulus vltra hunc terminum augeatur, quamobrem operae pretium erit integrationem inuentam ad hunc ipſum caſum accommodare.

Problema.

Valorem iſtius formulae integralis:

$$\int \frac{\partial x}{x\, l\, x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}},$$

a termino $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extenſum, per expreſſionem finitam aſſignare.*

Solutio.

§. 20. Quoniam iſtum valorem quaeſitum reduxi ad hanc formulam integralem: $\frac{\pi}{n \sin.\theta} \int \frac{\partial p \sin.\frac{\theta p}{n}}{\sin.\frac{\pi p}{n}}$, primum tenendum eſt, eum finite exprimi non poſſe, niſi angulus θ ad π habeat rationem rationalem. Ponamus ergo hanc rationem eſſe $\theta : \pi = \mu : \nu$, ita vt μ et ν ſint numeri integri, quamobrem pro formula ante tractata ſtatuamus $m = \mu$ et $n = \nu$, vnde fiet angulus $\nu \Phi = \frac{\pi p}{n}$. Ponamus hic breuitatis gratia $\frac{p}{n} = r$, vt habeamus $\Phi = \frac{\pi r}{\nu}$, et valor, quem quaerimus, ob $p = n r$, erit $\frac{\pi}{\sin.\theta} \int \frac{\partial r \sin.\theta r}{\sin.\pi r}$, quare cum hinc fiat $\Phi = \frac{\pi r}{\nu}$, formula ſupra tractata $\int \frac{\partial \Phi \sin m \Phi}{\sin.n \Phi}$ abibit in hanc: $S = \frac{\pi}{\nu} \int \frac{\partial r \sin.\frac{\mu \pi r}{\nu}}{\sin.\pi r}$, ſicque valor, quem hic quaerimus, erit $\frac{\nu . S}{\sin.\theta}$, ita vt tantum opus ſit valorem ipſius S pro hoc caſu euoluere.

§. 21.

§. 21. Confideremus nunc primum valorem ipfius ω, qui erat $\omega = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\nu}$, qui pro S produxit partem integralem

$$-\frac{\text{fin.}\, m\,\omega}{n\,\text{cof.}\, n\,\omega}\, l\, \frac{\text{fin.}\, \frac{\omega+\Phi}{2}}{\text{fin.}\, \frac{\omega-\Phi}{2}},$$

erit hic $m\,\omega = \frac{\mu\pi}{\nu} = \theta$ et $\text{cof.}\, n\,\omega = -1$; tum vero

$$\omega + \Phi = \frac{\pi}{\nu}(1+r) \text{ et } \omega - \Phi = \frac{\pi}{\nu}(1-r);$$

Primum igitur hic fumi debet angulus $\frac{\pi}{2\nu}$, quem breuitatis gratia ponamus $= \varrho$, vt fit $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$, et prima pars noftrae formulae S erit $\frac{\text{fin.}\,\theta}{\nu}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(1+r)}{\text{fin.}\,\varrho(1-r)}$; fequentes autem partes erunt

$$-\frac{\text{fin.}\,2\theta}{\nu}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(2+r)}{\text{fin.}\,\varrho(2-r)};$$

$$+\frac{\text{fin.}\,3\theta}{\nu}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(3+r)}{\text{fin.}\,\varrho(3-r)};$$

etc.

quae partes ductae in $\frac{\nu}{\text{fin.}\,\theta}$ praebent ipfum valorem quem noftrum problema poftulat, qui ergo erit

$$\frac{\text{fin.}\,\theta}{\text{fin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(1+\varrho)}{\text{fin.}\,\varrho(1-\varrho)} - \frac{\text{fin.}\,2\theta}{\text{fin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(2+r)}{\text{fin.}\,\varrho(2-r)}$$
$$+\frac{\text{fin.}\,3\theta}{\text{fin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(3+\varrho)}{\text{fin.}\,\varrho(3-\varrho)} - \frac{\text{fin.}\,4\theta}{\text{fin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(4+r)}{\text{fin.}\,\varrho(4-r)} \text{ etc.}$$

quae membra eo vsque continuari debent, donec eorum numerus fiat $\nu - 1$, vbi pro noftro problemate tantum notetur effe $r = \frac{p}{n}$ et $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$, exiftente $\theta : \pi = \mu : \nu$, fiue $\theta = \frac{\mu\pi}{\nu}$, ita vt μ fit numerus integer. Cum igitur in formula propofita exponens p neceffario minor fit quam n, erit r vnitate minor, ideoque omnes iftae formulae finitae.

§. 22. Forma igitur generalis omnium partium, ex quibus hoc integrale conftat, eft $\pm\frac{\text{fin.}\,i\theta}{\text{fin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{fin.}\,\varrho(i+r)}{\text{fin.}\,\varrho(i-r)}$, vbi fignum fuperius $+$ valet, quoties i fuerit numerus impar, inferius vero

—, si par. Pro vltima igitur harum partium erit $i = \nu - 1$. Vbi probe notetur, si sumeremus $i = \nu$, partem hinc resultantem sponte esse euanituram, propterea quod $i\varrho = \nu\varrho = \frac{\pi}{2}$, ideoque ambo sinus post logarithmum inter se aequales, ita vt perinde sit, siue membrorum numerus statuatur $= \nu - 1$, siue $= \nu$.

§. 23. Consideremus nunc vltimum membrum nostri valoris integralis, sumendo $i = \nu - 1$, vnde fiet $\sin.(\nu - 1)\theta = \sin.(\mu\pi - \theta)$, qui erit $= \sin.\theta$, si μ fuerit numerus impar, sin autem μ fuerit numerus par, is erit $= -\sin.\theta$. Tum vero erit $i\varrho = (\nu - 1)\varrho = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\nu}$, ideoque

$$\sin.(\nu - 1)\varrho = \sin.(\tfrac{\pi}{2} - \varrho(1 - r) = \cos.\varrho(1 - r).$$

Simili modo pro denominatore erit

$$\sin.\varrho(i - r) = \sin.(\tfrac{\pi}{2} - \varrho(1 + r) = \cos.\varrho(1 + r);$$

ita vt in vltimo membro cosinus eorundem angulorum occurrant, quorum sinus occurrunt in primo membro, quae permutatio etiam reperietur in membro penultimo et secundo, tum vero etiam in antepenultimo et tertio, vnde bina huiusmodi membra in vnum coniungi poterunt.

Casus I. ν par. μ par.

§. 24. Hic autem quatuor casus examinari conuenit, prouti ambo numeri μ et ν fuerint numeri vel pares vel impares. Sint igitur primo ambo pares, vnde coëfficiens vltimi membri erit $+\frac{\sin.\mu\pi - \theta}{\sin.\theta} = -\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}$, ideoque totum membrum vltimum $= -\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta} l \frac{\cos.\varrho(1 - r)}{\cos.\varrho(1 + r)}$, quamobrem primum membrum cum vltimo coniunctum dabit

$$\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta} l \frac{\sin.\varrho(1 + r)}{\sin.\varrho(1 - r)} \cdot \frac{\cos.\varrho(1 + r)}{\cos.\varrho(1 - r)} = \frac{\sin.\theta}{\sin.\theta} l \frac{\sin.2\varrho(1 + r)}{\sin.2\varrho(1 - r)}.$$

Simili modo secundum membrum et penultimum coalescent in $-\frac{\sin.2\theta}{\sin.\theta} l \frac{\sin.2\varrho(2 + r)}{\sin.2\varrho(2 - r)}$; tum vero etiam membrum tertium cum

ante-

antepenultimo dabit $+\frac{\sin. 3\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\sin. 2\varrho(3+r)}{\sin. 2\varrho(3-r)}$. Sicque de ceteris, ita vt hoc modo numerus membrorum ad semissem reducatur.

§. 25. Maneat nunc ν numerus par, sit vero μ numerus impar, eritque coëfficiens vltimi membri $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}$, quod ergo cum primo coniunctum dabit Casus II. ν par. μ impar.

$$+\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\sin.\varrho(1+r)}{\sin.\varrho(1-r)} \cdot \frac{\cos.\varrho(1-r)}{\cos.\varrho(1+r)} = \frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(1+r)}{\tang.\varrho(1-r)}.$$

Eodem modo membrum secundum cum penultimo contrahetur in hanc formam: $-\frac{\sin. 2\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(2+r)}{\tang.\varrho(2-r)}$; at tertium membrum cum antepenultimo coniunctum dabit $\frac{\sin. 3\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(3+r)}{\tang.\varrho(3-r)}$.

§. 26. Sit nunc ν numerus impar, at μ numerus par, et ob priorem conditionem coëfficiens vltimi termini erit $-\frac{\sin.\mu\pi-\theta}{\sin.\theta}$, qui ob μ numerum parem fiet $+\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}$, ideoque vti in casu secundo, vnde etiam primum membrum cum vltimo iunctum dabit $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(1+r)}{\tang.\varrho(1-r)}$; secundum vero cum penultimo iunctum $-\frac{\sin. 2\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(2+r)}{\tang.\varrho(2-r)}$; tum vero etiam tertium cum antepenultimo iunctum dat $\frac{\sin. 3\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\tang.\varrho(3+r)}{\tang.\varrho(3-r)}$. Casus III. ν impar. μ par.

§. 27. Sint denique ambo numeri μ et ν impares, atque euidens est hunc casum ad primum esse rediturum, ideoque primum et vltimum membrum contrahi in $\frac{\sin.\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\sin. 2\varrho(1+r)}{\sin. 2\varrho(1-r)}$, secundum et penultimum in $\frac{\sin. 2\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\sin. 2\varrho(2+r)}{\sin. 2\varrho(2-r)}$, tertium et antepenultimum in $\frac{\sin. 3\theta}{\sin.\theta}\, l\, \frac{\sin. 2\varrho(3+r)}{\sin. 2\varrho(3-r)}$. Vnde patet hos quatuor casus ad duos reduci posse, prouti ambo numeri μ et ν fuerint vel eiusdem indolis, scilicet ambo vel pares vel impares, vel diuersae indolis: alter par, alter impar. Priore casu eadem contractio locum habebit, quam casu primo dedimus, posteriore vero quam pro secundo dedimus. Casus IV. ν impar. μ impar.

§. 28.

§. 28. Ex his intelligitur, si numerus ν fuerit impar ideoque numerus membrorum primum inuentorum $\nu - 1$ par, tum omnia illa membra contrahi in numerum duplo minorem, scilicet $\frac{\nu - 1}{2}$. At vero si ν fuerit numerus par, ob $\nu - 1$ imparem, facta illa contractione remanebit vnum membrum medium respondens valori $i = \frac{\nu}{2}$, pro quo iste reperietur logarithmus:

$$l \frac{\sin. \varrho (\frac{\nu}{2} + r)}{\sin. \varrho (\frac{\nu}{2} - r)} = l \frac{\sin. (\frac{\pi}{4} + \varrho r)}{\sin. (\frac{\pi}{4} - \varrho r)}.$$

Quia igitur est $\sin. (\frac{\pi}{4} - \varrho r) = \cos. (\frac{\pi}{4} + \varrho r)$, euidens est hoc casu haberi $l \operatorname{tang.} (\frac{\pi}{4} + \varrho r)$, coëfficiens autem erit $\pm \frac{\sin. \frac{\nu}{2} \theta}{\sin. \theta}$, vbi signum superius valebit si $\frac{\nu}{2}$ fuerit impar, inferius vero si par. Est vero $\sin. \frac{\nu}{2} \theta = \sin. \frac{\mu \pi}{2}$; vnde patet, si fuerit μ numerus par, hoc membrum penitus e medio tolli; sin autem μ fuerit numerus par, tum $\sin. \frac{\mu \pi}{2}$ erit vel $+ 1$ vel $- 1$. Ista ambiguitas autem iam ante est sublata. His notatis sequentia exempla simpliciora percurramus; vbi notasse iuuabit, numerum μ semper minorem esse debere quam ν, neque tamen sumi posse $\mu = 0$.

§. 29. Quo autem euolutionem casuum specialium faciliorem reddamus, denotet Σ formulam illam integralem, cuius valorem hactenus per partes euoluimus, ita vt sit

$$\Sigma = \frac{\pi}{\sin. \theta} \int \frac{\partial r \sin. \theta r}{\sin. \pi r};$$

tum igitur duos casus distingui conueniet, prouti ambo numeri μ et ν fuerint eiusdem vel diuersae indolis.

I. Sint μ et ν eiusdem indolis, eritque

$$\Sigma = \frac{\sin. \theta}{\sin. \theta} l \frac{\sin. 2 \varrho (1 + r)}{\sin. 2 \varrho (1 - r)} - \frac{\sin. 2 \theta}{\sin. \theta} l \frac{\sin. 2 \varrho (2 + r)}{\sin. 2 \varrho (2 - r)} + \frac{\sin. 3 \theta}{\sin. \theta} l \frac{\sin. 2 \varrho (3 + r)}{\sin. 2 \varrho (3 - r)}$$
$$- \frac{\sin. 4 \theta}{\sin. \theta} l \frac{\sin. 2 \varrho (4 + r)}{\sin. 2 \varrho (4 - r)} \text{ etc.}$$

quas

quas formulas non vltra multitudinem $\frac{\nu-1}{2}$ continuari necesse est; neque enim hic terminus medius locum habet: si enim fuerit ν numerus par, erit etiam μ par, ideoque termini medii coëfficiens euanescit.

II. Sint numeri μ et ν diuersae indolis, vidimusque fore

$$\Sigma = \frac{\text{sin.}\,\theta}{\text{sin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{tang.}\,\varrho\,(1+r)}{\text{tang.}\,\varrho\,(1-r)} - \frac{\text{sin.}\,2\theta}{\text{sin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{tang.}\,\varrho\,(2+r)}{\text{tang.}\,\varrho\,(2-r)}$$
$$+ \frac{\text{sin.}\,3\theta}{\text{sin.}\,\theta}\, l\, \frac{\text{tang.}\,\varrho\,(3+r)}{\text{tang.}\,\varrho\,(3-r)} - \text{etc.}$$

quos terminos non vltra multitudinem $\frac{\nu-1}{2}$ continuari oportet. Hic autem, quoties ν numerus par, ideoque μ impar, occurret terminus medius, qui nunc vltimum locum occupabit, eritque $\pm \frac{1}{\text{sin.}\,\theta}\, l\, \text{tang.}\, (\frac{\pi}{4} + \varrho r)$, vbi signorum ambiguitas sequitur alternationem signorum. Ceterum hic vbique recordandum est esse $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$ et $\theta = \frac{\mu\pi}{\nu}$.

Exemplum I, quo $\nu = 2$.

§. 30. Hic igitur erit $\varrho = \frac{\pi}{4} = 45°$; at numerus μ necessario est $= 1$. Quia igitur $\frac{\nu-1}{2} = \frac{1}{2}$, hic solus terminus, quem medium vocamus, occurrit, ita vt nunc habeamus

$$\Sigma = l\, \text{tang.}\, \tfrac{\pi}{4}\,(1+r) = l\, \text{tang.}\, 45°\,(1+r),$$

qui valor sponte ex forma generali deducitur, cum sit

$$\Sigma = \pi \int \frac{\partial r\, \text{sin.}\, \frac{\pi r}{2}}{\text{sin.}\, \pi r};$$

est vero $\text{sin.}\, \pi r = 2\, \text{sin.}\, \frac{\pi r}{2}\, \text{cos.}\, \frac{\pi r}{2}$, vnde fit

$$\Sigma = \frac{\pi}{2} \int \frac{\partial r}{\text{cos.}\, \frac{\pi r}{2}}.$$

Quod si iam ponamus $\frac{\pi r}{2} = \Phi$, ob $\frac{\pi \partial r}{2} = \partial \Phi$, erit

$$\Sigma = \int \frac{\partial \Phi}{cos. \Phi} = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi).$$

Reſtituto ergo pro Φ valore aſſumto erit $\Sigma = l\,\text{tang.}\,45^\circ(1+r)$, vti inuenimus.

Exemplum II, quo $\nu = 3$.

§. 31. Hic ergo erit $\varrho = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 1$, integrale noſtrum vnico conſtabit termino. Nunc autem numerus μ duos valores habere poteſt: 1 et 2. Sit primo $\mu = 1$ hincque $\theta = \frac{\pi}{3} = 60$, et quia ambo numeri ſunt impares, ex caſu primo colligimus $\Sigma = l\frac{\text{ſin.}\,60^\circ(1+r)}{\text{ſin.}\,60^\circ(1-r)}$. At ſi fuerit $\mu = 2$ ideoque $\theta = 120^\circ$, quia numeri μ et ν habent diſparia ſigna, ex caſu ſecundo habebimus $\Sigma = l\frac{\text{tang.}\,30^\circ(1+r)}{\text{tang.}\,30^\circ(1-r)}$.

Exemplum III, quo $\nu = 4$.

§. 32. Hic ergo erit $\varrho = \frac{\pi}{8} = 22\tfrac{1}{2}^\circ$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 1\tfrac{1}{2}$, integrale vnico tantum membro integro conſtabit, niſi forte terminus medius accedat, quemadmodum ſingulis caſibus pro μ aſſumtis videbimus.

1°. Sit igitur $\mu = 1$, erit $\theta = 45^\circ$ et $2\theta = 90^\circ$. Hinc ergo ob numeros μ et ν diſpares, ex caſu ſecundo habebimus

$$\Sigma = l\frac{\text{tang.}\,22\tfrac{1}{2}^\circ(1+r)}{\text{tang.}\,22\tfrac{1}{2}^\circ(1-r)} - \sqrt{2}.\,l\,\text{tang.}\,22\tfrac{1}{2}^\circ(2+r).$$

2°. Sit $\mu = 2$, eritque $\theta = 90^\circ$ et $2\theta = 180^\circ$. Hinc ex caſu primo nanciſcimur $\Sigma = l\frac{\text{ſin.}\,45^\circ(1+r)}{\text{ſin.}\,45^\circ(1-r)}$. Cum autem ſit

$$\text{ſin.}\,45^\circ(1-r) = \text{coſ.}\,45^\circ(1+r),$$

euidens eſt fore $\Sigma = l\,\text{tang.}\,45^\circ(1+r)$, qui caſus vtique conuenit cum ratione $\mu : \nu = 1 : 2$.

3°. At si $\mu = 3$, ideoque $\theta = 135°$ et $2\theta = 270°$, cuius anguli sinus est -1, ob signa disparia habebimus ex casu secundo:

$$\Sigma = l\frac{\text{tang.}\, 22\tfrac{1}{2}°\,(1+r)}{\text{tang.}\, 22\tfrac{1}{2}°\,(1-r)} + \sqrt{2}.\, l\, \text{tang.}\, 22\tfrac{1}{2}°\,(2+r).$$

Exemplum IV, quo $\nu = 5$.

§. 33. Hic ergo erit $\varrho = 18°$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = 2$, integralia ex duobus membris integris constabunt, quia terminus medius, quem quasi dimidium spectamus, hic non occurrit.

1°. Sit $\mu = 1$, eritque $\theta = 36°$ et $2\theta = 72°$; hinc ob ambo signa eadem casus primus nobis dat

$$\Sigma = l\frac{\sin. 36°(1+r)}{\sin. 36°(1-r)} - \frac{\sin. 72°}{\sin. 36°}\, l\frac{\sin. 36°(2+r)}{\sin. 36°(2-r)}.$$

2°. Sit $\mu = 2$, eritque $\theta = 72°$, ideoque $\sin. 2\theta = \sin. 36°$; vnde ob signa disparia casus secundus dat

$$\Sigma = l\frac{\text{tang.}\, 18°(1+r)}{\text{tang.}\, 18°(1-r)} - \frac{\sin. 36°}{\sin. 72°}\, l\frac{\text{tang.}\, 18°(2+r)}{\text{tang.}\, 18°(2-r)}.$$

3°. Sit $\mu = 3$, ideoque $\theta = 108°$, siue $\sin.\theta = \sin. 72°$ et $\sin. 2\theta = -\sin. 36°$; vnde ob signa paria casus primus dat

$$\Sigma = l\frac{\sin. 36°(1+r)}{\sin. 36°(1-r)} + \frac{\sin. 36°}{\sin. 72°}\, l\frac{\sin. 36°(2+r)}{\sin. 36°(2-r)}.$$

4°. Sit denique $\mu = 4$ et $\theta = 144°$, hincque $\sin.\theta = \sin. 36°$ et $\sin. 2\theta = -\sin. 72°$; vnde ob signa disparia casus II. praebet

$$\Sigma = l\frac{\text{tang.}\, 18°(1+r)}{\text{tang.}\, 18°(1-r)} + \frac{\sin. 72°}{\sin. 36°}\, l\frac{\text{tang.}\, 18°(2+r)}{\text{tang.}\, 18°(2-r)}.$$

Exemplum V, quo $\nu = 6$.

§. 34. Hic igitur est $\varrho = \frac{\pi}{12} = 15°$, et quia $\frac{\nu-1}{2} = \frac{5}{2}$, integralia duobus membris integris constabunt, quibus accedere potest terminus medius, siue membrum dimidium, quando scilicet μ est numerus impar.

1°. Sit $\mu = 1$, erit $\theta = \frac{1}{6}\pi = 30°$, hinc fin. $\theta = \frac{1}{2}$, fin. $2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et fin. $3\theta = +1$; quare ob figna difparia fecundus cafus nobis fuppeditat

$$\Sigma = l\frac{tang.\,15°(1+r)}{tang.\,15°(1-r)} - \sqrt{3}\,.\,l\frac{tang.\,15°(1+r)}{tang.\,15°(1-r)} + 2\,l\,\text{tang.}\,15°(3+r).$$

2°. Sit $\mu = 2$, ideoque $\theta = 60°$, vnde fit fin. $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, fin. $2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et fin. $3\theta = 0$; vnde ob figna paria ex cafu primo colligimus

$$\Sigma = l\frac{fin.\,30°(1+r)}{fin.\,30°(1-r)} - l\frac{fin.\,30°(2+r)}{fin.\,30°(2-r)},$$

quae expreffio perfecte aequalis prodiit ei quam fupra inuenimus pro cafu $\nu = 3$ et $\mu = 1$.

3°. Sit $\mu = 3$, ideoque $\theta = 90$, hinc fin. $\theta = 1$, fin. $2\theta = 0$ et fin. $3\theta = -1$; vnde ob figna difparia cafus fecundus nobis praebet

$$\Sigma = l\frac{tang.\,15°(1+r)}{tang.\,15°(1-r)} + * - l\,\text{tang.}\,15°(3+r), \text{ fiue}$$

$$\Sigma = l\frac{tang.\,15°(1+r)}{tang.\,15°(1-r)\,tang.\,15°(3+r)},$$

quae expreffio aequalis effe debet ei, quae in primo exemplo prodiit, quia vtroque cafu eft $\mu : \nu = 1 : 2$.

4°. Sit $\mu = 4$, ideoque $\theta = 120°$, hinc fin. $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, fin. $2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, fin. $3\theta = 0$; vnde ob figna paria cafus primus praebet

$$\Sigma = l\frac{fin.\,30°(1+r)}{fin.\,30°(1-r)} + l\frac{fin.\,30°(2+r)}{fin.\,30°(2-r)},$$

quae conuenire debet cum fuperiore pro cafu quo $\mu : \nu = 2 : 3$.

5°. Sit $\mu = 5$, ideoque $\theta = 150°$, ergo fin. $\theta = \frac{1}{2}$, fin. $2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, fin. $3\theta = 1$; vnde ob figna difparia fecundus cafus nobis dat

$\Sigma =$

$$\Sigma = l\frac{tang.15^\circ(1+r)}{tang.15^\circ(1-r)} + \sqrt{3}\,.\,l\frac{tang.15^\circ(2+r)}{tang.15^\circ(2-r)} + 2\,l\,\text{tang. } 15^\circ(3+r).$$

Exemplum VI, quo $\nu = \infty$.

§. 35. Quia igitur fractio $\frac{\mu}{\nu}$ vt euanescens spectatur, ponamus $\mu = 1$, sicque angulus θr prae πr euanescet; vnde cum loco sinuum angulorum θ et θr ipsos angulos ponere liceat, erit noster valor $\Sigma = \frac{\pi \int r \partial r}{\int n. \pi r}$. Deinde quia etiam angulus $\varrho = \frac{\pi}{2\nu}$ in nihilum abit, loco omnium sinuum, in expressione pro Σ inuenta occurrentium, ipsos angulos scribere licebit, quo obseruato valor quantitatis Σ sequenti modo exprimetur:

$$l\frac{1+r}{1-r} - 2l\frac{2+r}{2-r} + 3l\frac{3+r}{3-r} - 4l\frac{4+r}{4-r} + \text{etc.}$$

§. 36. Singuli hi logarithmi commode in series resolui possunt. Cum enim forma generalis omnium terminorum sit $il\frac{i+r}{i-1}$, tum vero per notam resolutionem sit

$$l\frac{i+r}{i-1} = \frac{2r}{i} + \frac{2r^3}{3i^3} + \frac{2r^5}{5i^5} + \frac{2r^7}{7i^7} + \text{etc.}$$

erit totum membrum

$$= 2r\left(1 + \frac{rr}{3ii} + \frac{r^4}{5i^4} + \frac{r^6}{7i^6} + \text{etc.}\right)$$

quamobrem singulis partibus hoc modo euolutis fiet

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{2r} = &+1 + \frac{rr}{3} + \frac{r^4}{5} + \frac{r^6}{7} + \frac{r^8}{9} + \text{etc.}\\
&-1 - \frac{rr}{3.4} - \frac{r^4}{5.4^2} - \frac{r^6}{7.4^3} - \frac{r^8}{9.4^4} - \text{etc.}\\
&+1 + \frac{rr}{3.9} + \frac{r^4}{5.9^2} + \frac{r^6}{7.9^3} + \frac{r^8}{9.9^4} + \text{etc.}\\
&-1 - \frac{rr}{3.16} - \frac{r^4}{5.16^2} - \frac{r^6}{7.16^3} - \frac{r^8}{9.16^4} - \text{etc.}\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 37. Quod si iam istas series secundum columnas verticales disponamus, quia prima columna dat

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2},$$

prodibit haec expreſſio:

$$\frac{\Sigma}{2r} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} rr \left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5} r^4 \left(1 - \tfrac{1}{4^2} - \tfrac{1}{9^2} - \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7} r^6 \left(1 - \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} - \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Quoniam igitur harum ſerierum omnium ſummae ſunt cognitae, hinc per approximationem eo facilius valor litterae Σ definiri poterit, quia littera r ſemper denotat fractionem vnitate maiorem.

§. 38. Quod ſi ergo in ſubſidium vocemus ea quae olim circa ſummas harum poteſtatum erueram, atque iisdem denominationibus vtamur, ponendo:

$$A\pi^2 = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}$$
$$B\pi^4 = 1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}$$
$$C\pi^6 = 1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

quoniam hinc facile ſummae deriuantur, quando terminorum ſigna alternantur, habebitur:

$$\frac{\Sigma}{2r} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) A\pi\pi rr + \tfrac{1}{5}\left(1 - \tfrac{1}{8}\right) B\pi^4 r^4$$
$$+ \tfrac{1}{7}\left(1 - \tfrac{1}{32}\right) C\pi^6 r^6 + \text{etc.}$$

Vbi meminiſſe conuenit eſſe

$$A = \tfrac{1}{6},\; B = \tfrac{1}{90},\; C = \tfrac{1}{945},\; D = \tfrac{1}{9450},\; E = \tfrac{1}{93555},\; \text{etc.}$$

Horum autem valorum ratio iam ſaepius abunde eſt expoſita.

SPECI-

SPECIMEN SINGVLARE ANALYSEOS INFINITORVM INDETERMINATAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

§. 1.

Iam ante complures annos nouum prorsus Calculi genus adumbraui, cui *Analyseos Infinitorum indeterminatae* nomen inposueram, quoniam ad Analysin Infinitorum ordinariam eodem modo refertur, quo Analysis Diophantea ad Algebram communem. Indoles scilicet huius Calculi in eo consistit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles inuestigetur, vnde vna pluresue formulae integrales nanciscantur valores siue algebraicos, siue datas quadraturas inuoluentes. Veluti si talis definiri debeat relatio inter binas variabiles x et y, vt ista formula integralis: $\int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, algebraicum valorem adipiscatur, vel etiam datas quantitates transcendentes inuoluat. Hinc enim euidens est curuas algebraicas obtineri, quae sint vel rectificabiles, vel quarum rectificatio a datis quadraturis pendeat; atque hinc problema illud *Hermannianum* celeberrimum methodo directa solutum dedi, quo requirebantur curuae algebraicae non rectificabiles, sed quarum rectificatio datas quadraturas inuolueret, in quibus tamen nihilominus vel vnus, vel duo, vel adeo quotquis voluerit arcus assignari possent absolute rectificabiles,

biles, poſtquam ipſe *Hermannus* et *Bernoullii* methodo maxime indirecta ad eius ſolutionem perueniſſent. Praeterea vero etiam tum temporis plura alia huius generis Problemata non parum curioſa ope methodi, quam ibi expoſui, felici ſucceſſu expediui.

§. 2. Methodus autem mea huiusmodi Problemata ſoluendi ita eſt comparata, vt eius beneficio ſequens Problema generale pertractari poſſit:

Si P, Q, R, S, etc. fuerint functiones quaecunque datae variabilis x, *ſemper eiusmodi relatio algebraica inter binas variabiles* x *et* y *aſſignari poteſt, vt omnes iſtae formulae integrales*: $\int P \partial y$, $\int Q \partial y$, $\int R \partial y$, *etc. quotcunque fuerint, algebraicos ſortiantur valores. Quin etiam effici poteſt vt vna earum, vel etiam duae, datas quadraturas inuoluant.*

Quamuis autem iſte caſus latiſſime patere videatur, tamen hac conditione maxime reſtringitur, quod in iſtis formulis altera variabilis y vnicam tantum obtineat dimenſionem. Si enim diverſae dimenſiones occurrerent, neutiquam adhuc perſpicere poſſum, quomodo reſolutio ſuſcipi deberet.

§. 3. Quoties igitur eiusmodi quaeſtiones proponuntur, quas ad huiusmodi formulas reuocare non licet, fateri cogor, me nullo adhuc modo perſpicere poſſe, quibusnam artificiis ſolutionem ſaltem tentari conueniat, id quod exemplo ſimpliciſſimo declaraſſe ſufficiet. Veluti ſi hae duae formulae: $\int \frac{y \partial x}{x}$ et $\int \frac{\partial x}{y x}$, ambae reddi debeant integrabiles, aliam ſolutionem exhiberi poſſe non video, niſi quae ſponte ſe offert, dum pro y poteſtas quaecunque ipſius x aſſumitur. Vix autem asſeuerare auſim, nullam aliam ſolutionem locum habere poſſe. Ex quo intelligere licet, quantopere adhuc iſtud nouum cal-

cul

culi genus nobis ſit abſconditum, et omnia quae adhuc ſunt praeſtita vix tanquam prima eius elementa ſpectari poſſe; vnde maxime eſſet optandum, vt ſagaciſſima ingenia omnes vires intenderent ad iſtam Analyſeos partem vberius excolendam.

§. 4. Ad hoc etiam Calculi genus referri debent bina illa Theoremata, quae non ita pridem in medium afferre ſum auſus, quorum priore aſſeueraui, praeter circulum nullam aliam dari curuam algebraicam, cuius ſinguli arcus per arcus circulares exhiberi queant, ſiue nullam aliam inter x et y relationem algebraicam aſſignari poſſe, vt fieret

$$\surd(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{\partial z}{\surd(1 - zz)}.$$

Altero autem Theoremate affirmaui, nullam plane dari curvam algebraicam, cuius ſinguli arcus per ſimplices logarithmos exprimi queant, ſiue vt fieri poſſit $\surd(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{\partial z}{z}$. Pluribus quidem rationibus veritatem horum Theorematum corroborare ſum anniſus, ita vt nullum amplius dubium ſupereſſe poſſe videatur; interim tamen plenam eius demonſtrationem vix ante exſpectare licebit, quam nouum hoc Calculi genus vberius fuerit elaboratum.

§. 5. Imprimis autem ad iſtum Calculum pertinent quaestiones iam paſſim tractatae de lineis rectificabilibus in data ſuperficie ſiue conuexa ſiue concaua ducendis, quarum ſolutio ſemper multo maiorem huius noui calculi perfectionem requirere videtur. Poſtquam enim multum deſudaſſem, vt in ſuperficie ſphaerica lineam rectificabilem inueſtigarem, nullam aliam reperire potui, praeter eam, quae Geometris iam pridem innotuit, quae ſcilicet deſcribitur, dum circulus ſphaerae maximus ſuper minore prouoluitur, et cuius inuentio caſui potius fortuito quam certae methodo accepta eſt referenda; vnde vix dubitauerim affeuerare, praeter iftam curuam in fuperficie fphaerica nullam aliam dari, quae effet rectificabilis. Quin etiam in fuperficiebus cylindricis et conicis nullae aliae lineae rectificabiles mihi quidem exhibere poffe videntur, praeter eas quae ipfae funt rectae.

§. 6. Nuper vero fe mihi alia huius generis quaeftio obtulit, cuius quidem folutio iam aliunde mihi erat cognita; interim tamen eam ita comparatam deprehendi, vt nullam plane viam directam, ad eius folutionem pertingendi, perfpicere potuerim, nifi ipfa folutio iam aliunde innotuiffet. Hinc fcilicet methodum maxime obliquam et indirectam deriuaui, quae demum per plures ambages ad fcopum perduxerat; quamobrem plurimum lucis in hoc obfcuro calculi genere affulgere poffe confido, fi problema iftud cum mea folutione, quantumuis obliqua, Geometris propofuero.

Problema.

Inueftigare relationem inter binas quantitates variabiles q *et* z, *vt primo haec formula:* $\int q\,dz$, *fiat algebraica, tum vero ifta:* $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ *arcum circularem exprimat.*

Solutio.

§. 7. Hic manifefto fumma difficultas in pofteriori formula deprehenditur, quam ad arcum circularem reuocari oportet; vbi quidem in tranfitu notari meretur, fi ifta formula etiam algebraica reddi deberet, vti prior, ne vllam plane viam me perfpicere poffe hoc negotium conficiendi. Ex quo conditio, quod ifta formula ad arcum circularem reduci debeat, multo difficilior videbatur; interim tamen haec ipfa conditio viam nobis apperiet ad fcopum propofitum perueniendi, id quod ex fequentibus operationibus patebit.

§. 8. Primo igitur formulam $\int\frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcui circuli, cuius tangens ſit $\frac{x}{y}$, aequalem ſtatuamus, vbi data opera duas nouas variabiles x et y in calculum introducimus, quo deinceps ambae noſtrae propoſitae q et z per eas commodius exprimi queant. Sumtis igitur differentialibus conſequemur hanc aequationem: $\frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z}=\frac{y\partial x-x\partial y}{xx+yy}$, et nunc faciamus $zz=xx+yy$, id quod vtique ſine vlla quaeſtionis reſtrictione fieri licet, propterea quod ambae litterae x et y prorſus a noſtro arbitrio pendent. Poſito autem $zz=xx+yy$, ſupereſt vt fiat $z\partial z\sqrt{(qq-1)}=y\partial x-x\partial y$, vnde cum ſit $z\partial z=x\partial x+y\partial y$ deducimur ad hanc determinationem:

$$\sqrt{(qq-1)}=\frac{y\partial x-x\partial y}{x\partial x+y\partial y}.$$

§. 9. Vt iam hanc formulam a differentialibus liberemus, ſtatuamus $\partial y=p\partial x$, vbi manifeſtum eſt formulam integralem $\int p\partial x$ abſolute integrabilem ſeu algebraicam reddi debere. Hinc igitur habebimus $\sqrt{(qq-1)}=\frac{y-px}{x+py}$, vbi commode vſu venit vt ſumtis quadratis fiat $qq=\frac{(1+pp)(xx+yy)}{(x+py)^2}$; quare ob $xx+yy=zz$, erit radice extracta $q=\frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, ita vt nunc ambae variabiles q et z propoſitae ſatis concinne per binas nouas variabiles x et y expreſſae prodierint, atque poſteriori conditioni, qua formula $\int\frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcum circuli exprimere debet, iam perfecte ſit ſatisfactum, idque tam generaliter, vt nulla limitatio ſit introducta, quandoquidem in calculo adhuc duae variabiles x et y remanſerunt, nullo modo a ſe inuicem pendentes.

§. 10. Quoniam igitur poſteriori conditioni problematis eſt ſatisfactum, nihil aliud ſupereſt, niſi vt prior conditio, qua formula $\int q\partial z$ ad quantitatem algebraicam eſt reuocanda adimpleatur. Quod ſi vero loco q valorem inuentum ſubſtituamus

tuamus, reperiemus: $q\,\partial z = \frac{z\,\partial z\,\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$; quare cum fit

$$z\,\partial z = x\,\partial x + y\,\partial y = \partial x\,(x+py),$$

quasi praeter exſpectationem deducimur ad iſtam formulam ſimpliciſſimam: $q\,\partial z = \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$, quandoquidem hinc denominator quaſi caſu fortuito eſt ſublatus, ex quo tota quaeſtio huc eſt reducta, vt iſta formula integralis $\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$ ad quantitatem algebraicam reuocetur, ſimul vero etiam, vti iam ante obſeruauimus, haec formula $\int p\,\partial x$ euadat algebraica, quibus duabus conditionibus cum fuerit ſatisfactum, problema noſtrum in omni extenſione ſimul erit reſolutum, tum enim primo habebimus $y = \int p\,\partial x$, hincque porro

$$z = \sqrt{(xx+yy)} \text{ et } q = \frac{z\,\sqrt{(1+pp)}}{x+py}.$$

His autem valoribus ambae conditiones praeſcriptae ita adimplentur, vt ſit $\int q\,\partial z = \int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$, quae per hypotheſin eſt quantitas algebraica; pro altera autem conditione fit

$$\int \frac{\partial z\,\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.}\,\frac{x}{y},$$

ideoque arcui circuli aequalis, vti requirebatur.

§. 11. Quaeri igitur debet eiusmodi ralatio inter binas variabiles p et x, vt ambae iſtae formulae $\int p\,\partial x$ et $\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$ euadant algebraicae. Cum igitur ſit

$$\int p\,\partial x = px - \int x\,\partial p \text{ et}$$
$$\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)} = x\,\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quoniam hae duae nouae formulae in ſupra §. 2. memoratis continentur, per methodum olim expoſitam ſtatuamus primo $\int x\,\partial p = t$, vt ſit $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, atque altera formula abibit in hanc: $\int \frac{p\,\partial t}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae ſi ſtatuatur $= u$, hinc fiet $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial u}{\partial t}$; vbi iam pro u functionem quamcunque algebraicam ipſius t aſſu-

mere

mere licet. Quare si ponamus $\partial u = v \partial t$, erit $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = v$, hincque $p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$.

§. 12. Tota ergo nostra solutio ita se habebit. Sumta functione quacunque variabilis t, quae vocetur $= u$, vnde fiat $\partial u = v \partial t$, ita vt etiam v sit functio ipsius t, hinc primo erit

$$p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quo valore inuento capiatur $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, ita vt iam p et x per solam variabilem t sint expressae. Tum vero erit

$$\int p \partial x = \frac{v \partial t}{\partial p \sqrt{(1-vv)}} - t = y.$$

Deinde simili modo erit

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \frac{\partial t}{\partial p \sqrt{(1-vv)}} - u = \int q \partial z.$$

Denique ex his ipsae quantitates in problemate quaesitae ita per nouam variabilem t exprimentur, vt sit $z = \sqrt{(xx+yy)}$, et hinc $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, atque ex his valoribus problemati ita satisfiet, vt sit

$$\int q \partial z = \frac{x}{\sqrt{(1-vv)}} - u \text{ et } \int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.} \frac{x}{y}.$$

§. 13. Quo haec clarius intelligantur, exemplum euoluamus, sumendo $u = a t^n$, vnde fit

$$v = n a t^{n-1} \text{ et } \sqrt{(1-vv)} = \sqrt{(1-nnaat^{2n-2})},$$

vnde colligitur

$$p = \frac{n a t^{n-1}}{\sqrt{(1-nnaat^{2n-2})}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-nnaat^{2n-2})}}.$$

Cum igitur hinc sit

$$\partial p = \frac{n(n-1) a t^{n-2} \partial t}{(1-nnaat^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}, \text{ erit}$$

 $x =$

$$x = \frac{(1 - nnaat^{2n-1})^{\frac{3}{2}}}{n(n-1)at^{n-2}} \text{ et}$$

$$y = \frac{t(2 - n - nnaat^{2n-2})}{n-1}.$$

Quoniam vero hae formulae iam nimis fiunt intricatae, ſumamus $a = 1$ et $n = 2$, vt ſit $u = tt$ et $v = 2t$, ex quibus porro colliguntur valores

$$p = \frac{2t}{\sqrt{(1-4tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-4tt)}},$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 - 4tt)^{\frac{3}{2}},\ y = -4t^3, \text{ hincque}$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 3tt + 12t^4}, \text{ ac denique}$$

$$q = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} - 3tt + 12t^4)}}{\frac{1}{2} - 4tt}.$$

Problemati autem iam ita ſatisfiet, vt ſit

$$\int q\,\partial z = \tfrac{1}{2} - 3tt \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.} - \frac{(1-4tt)^{\frac{3}{2}}}{8t^3}.$$

Alia Solutio.

per formulas rationales procedens.

§. 14. Vt formulas radicales euitemus, ponamus ſtatim $p = \frac{rr-1}{2r}$, vt fiat $\sqrt{(1+pp)} = \frac{rr+1}{2r}$. Nunc igitur has duas formulas:

$$\int p\,\partial x = \int \frac{(rr-1)\partial x}{2r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(rr+1)\partial x}{2r},$$

integrabiles reddi oportet, id quod praeſtabitur faciendo has duas

duas formulas: $\int r\,\partial x$ et $\int\frac{\partial x}{r}$ integrabiles; tum enim fiet

$$\int p\,\partial x = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x}{r} \text{ et}$$

$$\int\partial x\,\sqrt{(1+pp)} = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x + \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x}{r}.$$

Sicque quaeritur eiusmodi relatio inter r et x, vt tantum hae duae formulae euadant integrabiles.

§. 15. Hic igitur reductione ſupra adhibita vtamur, et cum ſit

$$\int r\,\partial x = r\,x - \int x\,\partial r \text{ et } \int\frac{\partial x}{r} = \frac{x}{r} + \int\frac{x\,\partial r}{rr},$$

ponamus $\int x\,\partial r = t$, vt fiat $x = \frac{\partial t}{\partial r}$; tum vero altera formula erit $\int\frac{x\,\partial r}{rr} = \int\frac{\partial t}{rr}$, cuius valorem ſi vellemus ſtatuere $= u$, quantitas r ſignum radicale inuolueret, quod vt euitemus, vtamur eadem reductione: $\int\frac{\partial t}{rr} = \frac{t}{rr} + 2\int\frac{t\,\partial r}{r^3}$, ac iam ſtatuamus $\int\frac{t\,\partial r}{r^3} = s$, fietque $t = \frac{r^3\,\partial s}{\partial r}$. Hic iam pro s functionem quamcunque ipſius r accipere licebit, vnde fiat $\partial s = s'\,\partial r$, ſicque habebimus $t = r^3\,s'$, hincque regrediendo

$$\int\frac{\partial t}{rr} = \int\frac{x\,\partial r}{rr} = r\,s' + 2\,s,$$

tum vero, poſito $\partial s' = s''\,\partial r$, erit $x = 3\,r\,r\,s' + r^3\,s''$.

§. 16. His valoribus inuentis, cum ſit

$$\int r\,\partial x = 2\,r^3\,s' + r^4\,s'' \text{ et}$$

$$\int\frac{\partial x}{r} = 2\,s + 4\,r\,s' + r\,r\,s'',$$

ex his duobus valoribus colligimus ſequentes:

$$\int p\,\partial x = -s + (r^3 - 2\,r)\,s' + \tfrac{1}{2}(r^4 - r\,r)\,s'',$$

$$\int\partial x\,\sqrt{(1+pp)} = s + (r^3 + 2\,r)\,s' + \tfrac{1}{2}(r^4 + r\,r)\,s'',$$

ex quibus porro deducuntur reliqui: $\int p\,\partial x$, $z = \sqrt{(xx+yy)}$, $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+p\,y}$, hocque pacto tota ſolutio formulis rationalibus abſoluetur.

§. 17. Ceterum non dubito, quin contemplatio huius Problematis et Solutionis vtcunque obliquae, quae casu tantum successisse videatur, Geometris occasionem suppeditare queat, hoc nouum Calculi genus, cuius vix prima elementa nobis etiamnunc sunt cognita, vlterius rimandi atque ad maiorem perfectionis gradum euehendi, quandoquidem hinc maxima incrementa ad vniuersam Analysin redundare sunt existimanda.

DE LINEIS RECTIFICABILIBVS IN SVPERFICIE SPHAEROIDICA QVACVNQVE GEOMETRICE DVCENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4. *Iul.* 1776.

§. 1.

Maxime ardua eſt quaeſtio, quando in ſuperficie corporis cuiuscunque eiusmodi lineae geometrice ducendae requiruntur, quarum omnes arcus algebraice aſſignare liceat; cum adeo in cylindris, etſi pro genere ſimpliciſſimo huiusmodi corporum ſint habendi, praeter lineas rectas axi parallelas nullae aliae curuae rectificabiles duci queant. Hinc equidem etiam ſum arbitratus, in ſuperficiebus conicis quoque nullas alias tales lineas, niſi quae ipſae ſint rectae, duci poſſe, id quod quidem in genere affirmandum videtur; veruntamen deinceps deprehendi, in iis conis rectis, quorum latera ad baſis diametrum rationem teneant rationalem, infinitas plane lineas rectificabiles geometrice duci poſſe, quemadmodum alia occaſione ſum oſtenſurus. In ſuperficie autem ſphaerica nullae adhuc aliae huiusmodi lineae rectificabiles inueniri potuerunt, praeter Epicycloïdes illas ſatis notas, quae prouolutione circuli maximi ſuper minore naſcuntur, quae quidem inueſtigatio per nullam certam methodum, ſed potius caſu quodam fortuito peracta videtur.

§. 2. Multo minus igitur ſperare licuit, vnquam fore, vt in ſuperficie corporis ſphaeroidici eiusmodi lineae rectificabiles detegerentur; quandoquidem arcus elliptici talem inueſtigationem penitus impedire videbantur. Incidi autem nuper in inſigne quodpiam Theorema, quod tanquam fundamentum talium inueſtigationum merito ſpectari poteſt, vnde non ſolum pro ſuperficiebus ſphaericis methodo ſatis plana et facili curvas illas rectificabiles elicere potui, ſed quod me etiam ad tales curuas in ſuperficie ſphaeroidica quacunque manuduxit. Hoc igitur Theorema ante omnia iſti inueſtigationi praemittere neceſſe eſt.

Theorema generale.

§. 3. *Si littera v denotet functionem quamcunque anguli Φ, atque elementum curuae ita exprimatur vt ſit $\partial s = v \partial \Phi + \partial . \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, tum coordinatae orthogonales huius curuae, quae ſint x et y, ſemper ita abſolute exprimi poſſunt, vt ſit*

$$x = \int \partial s \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \operatorname{ſin.} \Phi - v \operatorname{coſ.} \Phi \quad et$$

$$y = \int \partial s \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \operatorname{coſ.} \Phi + v \operatorname{ſin.} \Phi.$$

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 1. §. 4. Sit A Y linea illa curua ad axem A N relata, ad quam in quouis puncto Y ducatur normalis Y N, in qua producta notetur punctum O, centrum circuli curuam in Y y oſculantis. Tum vero vocetur angulus A N Y $= \Phi$, ac demiſſo ex Y ad axem perpendiculo Y X, ſint coordinatae A X $= x$ et X Y $= y$, ipſe vero arcus A Y vocetur $= s$. Iam quia eius ele-

elementum est $Yy = \partial s = v\,\partial\Phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}$, per hypothesin, ob angulum $AYX = \Phi$, erit vtique $\partial x = \partial s$ sin. Φ et $\partial y = \partial s$ cos. Φ, ideoque

$$\partial x = v\,\partial\Phi \text{ sin. } \Phi + \text{sin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

$$\partial y = v\,\partial\Phi \text{ cos. } \Phi + \text{cos. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

quamobrem habebitur integrando

$$x = \int v\,\partial\Phi \text{ sin. } \Phi + \int \text{sin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

$$y = \int v\,\partial\Phi \text{ cos. } \Phi + \int \text{cos. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}.$$

§. 5. Ad istas formulas integrales euoluendas per reductiones notissimas elicimus

$$\int v\,\partial\Phi \text{ sin. } \Phi = -v \text{ cos. } \Phi + \int \partial v \text{ cos. } \Phi \text{ et}$$

$$\int \text{sin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ sin. } \Phi - \int \partial v \text{ cos. } \Phi,$$

quibus coniunctis manifesto prodit $x = -v$ cos. $\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ sin. Φ. Simili modo pro applicata y reperietur

$$\int v\,\partial\Phi \text{ cos. } \Phi = v \text{ sin. } \Phi - \int \partial v \text{ sin. } \Phi \text{ et}$$

$$\int \text{cos. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cos. } \Phi + \int \partial v \text{ sin. } \Phi;$$

vnde conficitur $y = v$ sin. $\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ cos. Φ.

Corollarium 1.

§. 6. Quodsi ergo v fuerit functio algebraica, non quidem ipsius anguli Φ, sed potius eius sinus vel tangentis, ita vt posita tang. $\Phi = t$ quantitas v sit functio quaecunque algebraica ipsius t; euidens est, ipsam curuam futuram esse algebraicam, propterea quod ambae eius coordinatae x et y per functiones algebraicas ipsius t exprimuntur. Longitudo autem huius curuae, cum sit $s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$, adeo erit rectificabilis, quoties formulam $\int v\,\partial\Phi$, siue $\int \frac{v\,\partial t}{1+tt}$, integrare licet. Contra vero

 haec

haec rectificatio ab eiusmodi quadratura pendebit, quam formula integralis $\int v\,\partial\Phi$ inuoluet; vnde ope huius theorematis facile erit, non solum innumerabiles curuas algebraicas assignare, quae sint rectificabiles, sed etiam tales, quarum rectificatio datam quadraturam inuoluat.

Corollarium 2.

§. 7. Quoniam ducta normali proxima y O, priori in centro circuli osculantis O occurrente, ob angulum $A\,n\,y = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus $Y\,O\,y = \partial\Phi$, ideoque ipse radius osculi $YO = \frac{\partial s}{\partial\Phi}$. Hinc ergo sumto elemento $\partial\Phi$, pro differentialibus secundis, constante, erit ipse radius osculi $YO = v + \frac{\partial\partial v}{\partial\Phi^2}$.

Corollarium 3.

§. 8. Quoniam inuenimus applicatam

$$XY = y = v\,\text{sin.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cos.}\,\Phi,$$

ob angulum $XNY = \Phi$ erit ipsa normalis

$$YN = \frac{v}{\text{sin.}\,\Phi} = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cot.}\,\Phi$$

et subnormalis

$$XN = v\,\text{cos.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \cdot \frac{\text{cos.}\,\Phi^2}{\text{sin.}\,\Phi},$$

vnde erit interuallum $AN = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \cdot \frac{1}{\text{sin.}\,\Phi}$. Quare si ex A in normalem YN ducatur perpendiculum AP, habebimus $AP = AN\,\text{sin.}\,\Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ et interuallum $NP = AN\,\text{cos.}\,\Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cot.}\,\Phi$. Hinc cum esset $YN = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cot.}\,\Phi$, colligitur fore $PY = v$; sicque functio nostra v exprimit perpendiculum ex puncto A in tangentem YT demissum.

Corollarium 4.

§. 9. Hinc igitur discimus, quoties hoc perpendiculum AT fuerit functio algebraica anguli $ANY = \Phi$, seu potius

tius eius tangentis $= t$, toties ipsam curuam fore algebraicam; quoniam inde ambas coordinatas $AP = x$ et $PN = y$ algebraice exprimere licet. Vbi meminisse iuuabit angulum Φ tanquam mensuram amplitudinis curuae spectari posse.

Corollarium 5.

§. 10. Si praeterea ducamus chordam AY, quia in triangulo rectangulo APY habemus cathetos $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$ et $PY = v$, longitudo ipsius chordae ita concinne exprimitur, vt sit $AY = \sqrt{(vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2})}$, vnde simul deducitur tang. $AYP = \frac{\partial v}{v \partial \Phi}$, quae ergo simul erit cotangens anguli AYT, quem chorda cum tangente constituit, ita vt huius anguli tangens sit $= \frac{v \partial \Phi}{\partial v}$, dum ipsa tangens YT aequatur rectae $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion 1.

§. 11. Ceterum si perpendiculum, ex quopiam puncto fixo A in tangentem curuae demissum, fuerit functio algebraica amplitudinis curuae $= \Phi$, seu potius eius tangentis $= t$, facile perspicitur, si loco A aliud quoduis punctum a accipiatur, perpendiculum inde in tangentem demissum at pariter fore functionem algebraicam ipsius Φ, seu t. Vnde in genere patet, quoties perpendicula, ex puncto quocunque fixo in tangentes curuae demissa, fuerint functiones algebraicae ipsius Φ vel t, toties curuam semper fore algebraicam, quod est theorema sine dubio maximi momenti in theoria linearum curuarum.

Scholion 2.

§. 12. Quae hactenus analytice sunt demonstrata, per solas considerationes geometricas sequenti modo ostendi possunt. Tab. I. Fig. 2.
Sumatur punctum quodcunque fixum A, vnde recta AN posi-

 tione

tione data cum radio osculi curuae Y O constituat angulum $ANY = \Phi$; tum vero ex A in ipsum radium osculi ducatur perpendiculum A P, positoque interuallo $YP = v$, si ex A simili modo in radium osculi proximum yO ducatur perpendiculum Ap, erit vtique interuallum $yp = v + \partial v = Yq$, propterea quod ambo radii osculi ad curuam sunt normales; quare cum, ob angulum $Any = \Phi + \partial \Phi$, sit angulus ad $O = \partial \Phi$, erit etiam angulus $PAq = \partial \Phi$, vnde cum $Pq = \partial v$, euidens est fore perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, ex quo erit $Ap = \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$, ideoque elementum $pq = \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$, vnde ob angulum ad $O = \partial \Phi$ statim deducitur interuallum Oq siue $OP = \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi^2}$, sicque perspicuum est ipsum radium osculi fore $v + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi^2}$. Porro vero quia inuenimus perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, ob angulum $ANP = \Phi$ erit ipsum interuallum $AN = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{1}{\sin.\Phi}$ et interuallum $PN = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot.\Phi$, ita vt iam futura sit tota normalis

$$YN = YP + PN = v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot.\Phi.$$

Demittamus iam ex Y ad A N perpendiculum Y X, vt obtineamus coordinatas $AX = x$ et $XY = y$, et quoniam in triangulo rectangulo X Y N habemus hypothenusam $YN = v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot.\Phi$, cum angulo $XNY = \Phi$, inde statim cognoscimus ipsam applicatam

$$XY = y = v \sin.\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cos.\Phi$$

et subnormalem

$$XN = v \cos.\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi},$$

qua a toto interuallo A N ablata relinquitur abscissa

$$AX = x = -v \cos.\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \sin.\Phi,$$

quas ergo coordinatas, sine vlla integratione, algebraice expressas elicuimus, prorsus vt ante. His igitur praemissis institutum nostrum aggrediamur.

Pro-

Problema.

§. 13. *Si quadrans ellipticus $A C B$ circa axem $C B$ circumuoluatur, ficque fphaeroides ellipticum formetur, cuius aequator erit circulus radio $C A$ defcriptus, femiaxis vero $C B$, in fuperficie huius fphaeroidis eiusmodi lineam curuam geometrice defcribere, quae fimul fit rectificabilis.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 14. Vocemus radium aequatoris $C A = 1$, at femiaxem fphaeroidis $C B = c$, ac referat in Figura 4. circulus centro C radio $C A = 1$ defcriptus aequatorem fphaeroidis propofiti, ad quem ex quouis fuperficiei puncto Z demittatur perpendiculum Z Y, atque ex Y ad radium aequatoris C A perpendiculum Y X, vt locum puncti Z per ternas coordinatas orthogonales determinemus, quae fint $C X = x$, $X Y = y$ et $Y Z = z$, quibus conftitutis, fi noftrum fphaeroides effet fphaera radio $= 1$ defcripta, ob interuallum $C Z = 1$ haberetur haec aequatio: $xx + yy + zz = 1$, ideoque $z = \sqrt{(1 - xx - yy)}$. Nunc igitur, quia femiaxis fphaeroidis eft $= c$, ifta altitudo Y Z in ratione $= 1 : c$ augeri debet, ita vt pro hac fuperficie fphaeroidica habeamus iftam aequationem: $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, quae eft aequatio naturam huius fphaeroidis exprimens. Fig. 4.

§. 15. Conftat autem in genere, quando in fuperficie corporis cuiuscunque ducatur linea curua quaecunque, eius elementum ∂s femper ita exprimi, vt fit $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$. Quamobrem noftra quaeftio huc reducitur, vt eiusmodi relatio inter binas coordinatas x et y affignetur, vnde formula illa differentialis pro ∂s data euadat integrabilis; tum autem aequatio inter x et y huic conditioni fatisfaciens fimul exhibebit proiectionem curuae illius rectificabilis in plano aequatoris factam, ita

ita vt viciſſim ex cognita hac proiectione ipſa curua quaeſita in ſuperficie ſphaeroidis facile exploretur.

§. 16. Quisquis autem hunc laborem in genere ſuſcipere voluerit, mox deprehendet, nullum ſucceſſum exſpectari poſſe, niſi inueſtigationem ad caſum particularem adſtrinxerit, quo ratio conſtans inter longitudinem curuae quaeſitae s et altitudinem z ſtatuatur. Hanc ob rem ſtatim ponamus eſſe $s = nz$, ita vt ſumtis differentialibus eſſe debeat

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = nn\,\partial z^2, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial z \sqrt{(nn - 1)};$$

vnde perſpicitur, numerum n neceſſario vnitate maiorem eſſe debere.

§. 17. Cum igitur formula $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ exprimat elementum proiectionis in plano aequatoris factae, patet etiam hanc proiectionem eſſe debere curuam rectificabilem. Si enim eius longitudo ponatur $= \Sigma$, ob $\partial \Sigma = \partial z \sqrt{(nn - 1)}$ ſequitur fore $\Sigma = z\sqrt{(nn - 1)} + C$; quamobrem ſi amplitudo iſtius arcus Σ ponatur $= \Phi$, per theorema praecedens, ſi v denotet functionem quamcunque algebraicam ipſius Φ, erit $\Sigma = \int v \partial \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, vbi manifeſtum eſt formulam $\int v \partial \Phi$ quoque integrabilem eſſe debere; tum vero neceſſe eſt vt ſit

$$\int v \partial \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} = z\sqrt{(nn - 1)}.$$

§. 18. Cum autem ſit $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, ſupra vidimus ob

$$x = -v \operatorname{coſ.} \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et}$$

$$y = v \operatorname{ſin.} \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \operatorname{coſ.} \Phi, \text{ fore}$$

$$xx + yy = vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2};$$

ſicque

ſicque totum negotium reductum eſt ad hanc aequationem:

$$\int v\,\partial\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} = c\sqrt{(nn-1)\left(1 - vv - \frac{\partial v^2}{\partial\phi^2}\right)},$$

ad quam reſoluendam ponamus $v = f\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi+\alpha)$, eritque

$$\int v\,\partial\phi = \frac{f}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha) \text{ et}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\phi} = -\lambda f\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha),$$

vnde habebimus

$$\int v\,\partial\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} = \frac{f(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha),$$

qui ergo eſt valor membri ſiniſtri noſtrae aequationis.

§. 19. Pro membro autem dextro primo erit

$$vv = ff\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi+\alpha)^2 \text{ et}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial\phi^2} = \lambda^2 f^2\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha)^2;$$

quamobrem habebimus

$$1 - vv = 1 - ff\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi+\alpha)^2,$$

qui valor vt cum poſtrema parte conſpiret, ſumatur $f = 1$, vt fiat $1 - vv = \text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha)^2$, hocque modo noſtra aequatio erit

$$\frac{(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha) = c\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha)\sqrt{(nn-1)(1-\lambda\lambda)},$$

quae per $\sqrt{(1-\lambda\lambda)}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi+\alpha)$ diuiſa praebet

$$\frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda)}}{\lambda} = c\sqrt{(nn-1)}$$

vnde numerus hactenus indefinitus λ ita determinatur, vt ſit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1+(nn-1)cc}}$. Vel etiam numerum λ arbitrio noſtro relinquere poſſumus, indeque numerum illum n definire, qui ergo erit $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, vbi tantum notari oportet, numerum λ ita accipi debere, vt numerus $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc$ prodeat poſitiuus, id quod eueniet quando fuerit $\lambda < \frac{1}{\sqrt{(1-cc)}}$; tum vero etiam, vt iam notauimus, numerus n vnitate maior eſſe debet, ad quod requiritur vt ſit $\lambda < 1$, atque adeo hanc conditionem obſeruaſſe ſufficiet: dummodo enim $\lambda < 1$, etiam ſemper erit $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc > 0$, ſimulque $n > 1$.

§. 20. Quaecunque igitur fractio vnitate minor pro λ accipiatur, indeque capiatur $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, habebimus

$$v = \operatorname{cof.}(\lambda\Phi + \alpha),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} = -\lambda \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha) \text{ et}$$

$$\int v\,\partial\Phi = \frac{1}{\lambda} \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha),$$

vnde coordinatae proiectionis curuae quaeſitae in planum aequatoris factae ita determinabuntur, vt ſit

$$x = -\operatorname{cof.}\Phi \operatorname{cof.}(\lambda\Phi + \alpha) - \lambda \operatorname{fin.}\Phi \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha) \text{ et}$$

$$y = \operatorname{fin.}\Phi \operatorname{cof.}(\lambda\Phi + \alpha) - \lambda \operatorname{cof.}\Phi \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha),$$

ex quibus porro colligitur

$$xx + yy = \operatorname{cof.}(\lambda\Phi + \alpha)^2 + \lambda\lambda \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha)^2, \text{ fiue}$$

$$xx + yy = 1 - (1 - \lambda\lambda) \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha)^2.$$

At vero per notas reductiones ambae coordinatae ita repraeſentari poterunt:

$$x = -\frac{1+\lambda}{2} \operatorname{cof.}[(\lambda - 1)\Phi + \alpha] - \frac{1-\lambda}{2} \operatorname{cof.}[(\lambda + 1)\Phi + \alpha]$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2} \operatorname{fin.}[(\lambda + 1)\Phi + \alpha] - \frac{1+\lambda}{2} \operatorname{fin.}[(\lambda - 1)\Phi + \alpha],$$

tum autem longitudo ipſius curuae in ſuperficie ſphaeroidica deſcriptae erit

$$s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda} \operatorname{fin.}(\lambda\Phi + \alpha).$$

§. 21. Has formulas multo ſimpliciores reddere licet, ſumendo angulum conſtantem $\alpha = 0$. Quoniam enim per variationem huius anguli α tantum poſitio coordinatarum x et y immutatur, dum ipſa curua eadem manet, ſine vlla ſolutionis reſtrictione tuto ſtatuere poterimus $\alpha = 0$; tum autem coordinatae

natae x et y ita concinnius exprimentur:

$$x = -\frac{1+\lambda}{2} \operatorname{cof.} (1-\lambda)\Phi - \frac{(1-\lambda)}{2} \operatorname{cof.} (1+\lambda)\Phi,$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2} \operatorname{fin.} (1+\lambda)\Phi + \frac{(1+\lambda)}{2} \operatorname{fin.} (1-\lambda)\Phi,$$

tum autem erit longitudo curuae in superficie descriptae

$$s = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda} \operatorname{fin.} \lambda\Phi,$$

quae ergo euanescit vbi $\Phi = 0$, et eo vsque extenditur, quoad angulus $\lambda\Phi$ euadat rectus, a quo termino curua iterum recedere incipit.

§. 23. In hac euolutione quantitas c, qua species sphaeroidis exprimitur, aliter in computum non est ingressa, nisi in numero n, quem inuenimus $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, et quo ratio continetur, quam longitudo curuae quaesitae ad altitudinem z tenet; vnde haec proprietas notatu maxime digna consequitur: quod pro omnibus sphaeroidibus ellipticis, siue sint oblonga siue compressa, lineae rectificabiles, in eorum superficiebus ducendae, si in planum aequatoris proiiciantur, ad easdem proiectiones perducant; ita vt solutio huius problematis plane congruat cum solutione eius, quo lineae rectificabiles in superficie sphaerica quaeruntur. Atque adeo praesens solutio illi, qua hactenus istud problema pro sphaera est solutum, ideo longissime anteferenda videtur, quod per certam methodum ad scopum optatum perduxit, cum solutio vulgaris casui fortuito accepta sit referenda.

Applicatio
praecedentis Solutionis ad corpora conoidica hyperbolica.

§. 23. Quoniam quantitas c, qua semiaxem ellipsis generantis CB designauimus, ex calculo fere penitus est egressa, manifestum est nostram solutionem etiam locum habere

 posse

posse, licet ista quantitas c fiat adeo imaginaria, id quod euenit, quando ellipsis initio considerata transmigrat in hyperbolam, cuius centrum erit etiamnunc in c et semiaxis transuersus $CA = 1$, vt ante. Ad hunc igitur casum euoluendum tantum opus est vt loco c quantitatem imaginariam statuamus, ponendo $cc = -aa$, siue $c = a\sqrt{-1}$.

§. 24. Omnia igitur, quae supra euoluimus, prorsus immutata manebunt, sola illa aequatione, qua numerum n definivimus, excepta, quae posito $c = a\sqrt{-1}$ recipiet hanc formam:

$$n = \frac{\sqrt{(1 - \lambda\lambda - \lambda\lambda aa)}}{\lambda\sqrt{-a}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda\lambda(1+aa) - 1}{aa}};$$

vbi patet esse debere $\lambda\lambda(aa+1) > 1$, siue $\lambda > \frac{1}{\sqrt{(aa+1)}}$, tum vero, quia etiam esse debet $n > 1$, tam haec quam praecedens conditio adimplebitur, dummodo capiatur $\lambda > 1$. Quamobrem tota solutio huius casus a praecedente in hoc tantum discrepabit, quod hic numerum λ vnitate maiorem accipi oportet, cum ante vnitate minor fuisset; quamobrem coordinatae proiectionis nunc ita exprimentur:

$$x = -\frac{\lambda+1}{2}\operatorname{cof.}(\lambda-1)\Phi + \frac{\lambda-1}{2}\operatorname{cof.}(\lambda+1)\Phi,$$

$$y = -\frac{\lambda-1}{2}\operatorname{fin.}(\lambda-1)\Phi - \frac{\lambda+1}{2}\operatorname{fin.}(\lambda-1)\Phi,$$

ex hisque erit

$$xx + yy = 1 + (\lambda\lambda - 1)\operatorname{fin.}\lambda\Phi^2,$$

ipsa autem curuae in superficie descriptae longitudo erit

$$s = -\frac{\lambda\lambda-1}{\lambda}\operatorname{fin.}\lambda\Phi,$$

vbi signum negationis nihil in figura curuae turbat, dum tantum in partem vergit contrariam ei quam in calculo spectauimus. Hoc igitur modo solutio nostra multo latius est extensa quam primo initio sperare licuisset.

DE

DE SVPERFICIE CONI SCALENI,

VBI IMPRIMIS INGENTES DIFFICVLTATES, QVAE IN HAC INVESTIGATIONE OCCVRRVNT, PERPENDVNTVR.

Auctore.
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 12 *Septembr.* 1786.

§. 1.

Sit circulus E G F H basis coni scaleni propositi, cuius vertex in sublimi situs sit A, vnde ad planum basis demittatur perpendiculum A B, et ex B per centrum basis C agatur recta F B C E. Vocetur altitudo $AB = a$, deinde vero sit $BC = b$, quae linea exhibet coni obliquitatem; si enim esset $b = 0$, conus foret rectus. Denique vero vocetur radius basis $CE = CF = c$, ac manifestum est his tribus quantitatibus a, b, c naturam coni penitus determinari. Hinc si ad verticem ductae intelligantur rectae E A et F A, ob $BE = c + b$ et $BF = c - b$, erit $AE = \sqrt{aa + (c+b)^2}$, quod est latus coni maximum; latus vero minimum erit $AF = \sqrt{aa + (c-b)^2}$. Praeterea si in basi ducatur diameter G H ad E F normalis, rectae A G et A H erunt latera media coni inter se aequalia; ad quorum quantitatem inueniendam, quoni- Tab. I. Fig. 5.

 am

am eſt $AC = \sqrt{(aa + bb)}$ et triangula ACG et ACH ad C rectangula, erit $AG = AH = \sqrt{(aa + bb + cc)}$.

§. 2. Quoniam igitur nobis propoſitum eſt ſuperficiem huius coni ſcaleni indagare, quemadmodum ea ſcilicet per terna elementa a, b et c definiatur, haec inueſtigatio facillime ſequenti modo inſtituetur. Ducto coni latere maximo AE, in baſi coni, ex centro C, capiatur angulus indefinitus $ECS = \Phi$, qui ſuo differentiali $SCs = \partial\Phi$ augeatur, ac vocetur portio ſuperficiei conicae inter rectas AE et AS atque arcum ES incluſa $= S$, ita vt poſito $\Phi = 180^\circ$ punctum S in F perueniat, et iſta quantitas S nobis ſit indicatura ſemiſſem ſuperficiei conicae, eiusque ergo duplum totam ſuperficiem coni quaeſitam. Quodſi iam ex A ducamus rectam proximam As, area trianguli elementaris SAs dabit valorem differentialis ∂S, ita vt totum negotium huc redeat, vt area iſtius trianguli SAs exploretur, quod ob arculum $Ss = c\partial\Phi$, ideoque infinite paruum, tanquam triangulum rectilineum ſpectari poteſt.

§. 3. Hunc in finem ducatur ad S tangens circuli SP, ſiue, quod eodem redit, producatur elementum Ss, ita vt recta SP ſit baſis Ss producta; vnde ſi ex A ad eam ducatur perpendicularis AP, erit area trianguli ASs, ſiue

$$\partial S = \frac{Ss \cdot AP}{2} = \tfrac{1}{2} AP \cdot c\partial\Phi.$$

Conſtat autem hoc perpendiculum AP duci, ſi ex puncto B ad rectam SP demittatur perpendiculum BP, quandoquidem tum etiam recta AP ei erit normalis. Iam ex C ad rectam BP normaliter agatur recta CQ, et quia BP parallela eſt radio CS, erit angulus $CBQ = \Phi$, vnde ob $BC = b$ erit $CQ = b \sin.\Phi$ et $BQ = b \cos.\Phi$. Quare cum ſit $PQ = CS = c$, erit $BP =$

$c + b$

$c + b \operatorname{cos}.\Phi$ et interuallum $SP = CQ = b \operatorname{sin}.\Phi$, ideoque ex triangulo APB, quia AB ad BP est perpendicularis, reperietur hypothenusa $AP = \sqrt{aa + (c + b \operatorname{cos}.\Phi)^2}$, consequenter hinc elicimus elementum superficiei quaesitum

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{aa + (c + b \operatorname{cos}.\Phi^2)}$$

Sicque tota inuestigatio huc est perducta, vt ista formula differentialis integretur.

§. 4. Consideremus primo casum coni recti, qui prodit facta obliquitate $b = 0$. Hoc ergo casu habebimus $\partial S = \frac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{(aa + cc)}$, vnde integrando fit $S = \frac{1}{2} c \Phi \sqrt{(aa + cc)}$. Fiat nunc $\Phi = 180°$, siue $\Phi = \pi$, et semissis superficiei conicae erit $= \frac{1}{2} \pi c \sqrt{(aa + cc)}$, ideoque tota coni superficies $= \pi c \sqrt{(aa + cc)}$; vbi notetur, formulam $\sqrt{(aa + cc)}$ exprimere latus huius coni recti; tum vero, totam basis peripheriam esse $= 2\pi c$. Constat autem superficiem coni recti inueniri, si latus coni ducatur in dimidiam basis circumferentiam.

§. 5. Hinc autem facile intelligitur pro conis scalenis hanc inuestigationem multo magis fieri arduam; propterea quod ea pendet ab integratione huius formulae:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{aa + (c + b \operatorname{cos}.\Phi)^2},$$

quae euolata praebet

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{aa + cc + 2bc \operatorname{cos}.\Phi + bb \operatorname{cos}.\Phi^2},$$

quae ob $\operatorname{cos}.\Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cos}.2\Phi$ etiam transmutari potest in hanc formam:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{(aa + \tfrac{1}{2} bb + cc + 2bc \operatorname{cos}.\Phi + \tfrac{1}{2} bb \operatorname{cos}.2\Phi)}.$$

Huius autem formulae integratio absoluta nullo modo sperari potest, siquidem certum est, eam neque per logarithmos, neque

que per arcus circulares expediri poſſe; quamobrem nobis tantum in approximationibus erit acquiescendum.

§. 6. Ponamus breuitatis gratia $aa + \frac{1}{2}bb + cc = ff$, vt habeamus:

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{ff + 2bc \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi},$$

vbi primo obſeruandum occurrit, ſi quantitas ff fuerit valde magna prae binis reliquis terminis, tum approximationem nullam moram faceſſere; ſi enim ponamus

$$2bc \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi = v,$$

vt ſit $\partial S = \frac{1}{2} c \partial \Phi \sqrt{(ff + v)}$, facta euolutione erit

$$\sqrt{(ff+v)} = f + \tfrac{1}{2}\tfrac{v}{f} - \tfrac{1.1}{2.4}\tfrac{vv}{f^3} + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\tfrac{v^3}{f^5} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\tfrac{v^4}{f^7} \text{ etc.}$$

quae ſeries eo magis conuergit, quo minor erit quantitas v prae ff; vnde ſufficiet huius ſeriei vel tantum binos terminos priores accipere, vel inſuper tertium, vel adeo etiam quartum pluresue admittere, vnde aliquot caſus euoluamus.

Caſus I.

quo approximatio in ſecundo termino ſubſiſtit.

§. 7. Hoc igitur caſu habebimus

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c \partial \Phi \left(f + \tfrac{v}{2f}\right),$$

vbi primus terminus integratus dat $\frac{1}{2} fc\Phi$, ſecundus vero terminus, ob

$$v = 2bc \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi,$$

integratus praebet

$$\tfrac{c}{4f} \int \partial \Phi (2bc \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} bb \cos. 2\Phi)$$
$$= \tfrac{c}{4f} (2bc \sin. \Phi + \tfrac{1}{4} bb \sin. 2\Phi),$$

ita

ita vt iam ſit

$$S = \tfrac{1}{2} c f \Phi + \frac{b c c \sin. \Phi}{2 f} + \frac{b b c \sin. 2 \Phi}{16 f}.$$

Fiat nunc $\Phi = \pi$, ac formula duplicata dabit totam coni ſuperficiem $= \pi c f$, quae reſtituto pro f valore erit

$$S = \pi c \sqrt{(a a + \tfrac{1}{2} b b + c c)},$$

quae ergo ſufficere poteſt, quoties quantitates $2 b c$ et $\tfrac{1}{2} b b$ fuerint quam minimi reſpectu quantitatis $a a + \tfrac{1}{2} b b + c c$. Haec conditio imprimis locum habet, quando altitudo coni fuerit permagna prae obliquitate b atque etiam radio baſis c. Ante autem vidimus, ſi obliquitas coni prorſus euaneſceret, ſuperficiem coni recti eſſe $= \pi c \sqrt{(a a + c c)}$, nunc igitur ſuperficies tantillo eſt maior in ratione

$$\sqrt{(a a + c c)} : \sqrt{(a a + \tfrac{1}{2} b b + c c)}.$$

Caſus II.

quo approximatio in tertio termino ſubſiſtit.

§. 8. Quoniam hic tantum ſuperficiem coni quaerimus, ſtatim ponere poſſumus $S = c \partial \Phi \sqrt{(f f + v)}$; tum enim integratione peracta tantum opus eſt facere $f = \pi$. Praeſenti igitur caſu erit

$$\partial S = c \partial \Phi \left(f + \frac{v}{2 f} - \frac{v v}{8 f^3}\right);$$

modo autem vidimus binos terminos priores dare $\pi c f$, ita vt ſit $S = \pi c f - \frac{c}{8 f^3} \int v v \partial \Phi$. Eſt vero

$$v v = 4 b b c c \cos. \Phi^2 + 2 b^3 c \cos. \Phi \cos. 2 \Phi + \tfrac{1}{4} b^4 \cos. 2 \Phi^2,$$

quae formula ob

$$\cos. \Phi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos. 2 \Phi;$$
$$\cos. \Phi \cos. 2 \Phi = \tfrac{1}{2} \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} \cos. 3 \Phi \text{ et}$$
$$\cos. 2 \Phi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos. 4 \Phi,$$

 trans-

transformatur in hanc:

$$v\,v = 2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4 + b^3\,c\,\text{cos}.\,\Phi + 2\,b\,b\,c\,c\,\text{cos}.\,2\,\Phi$$
$$+ b^3\,c\,\text{cos}.\,3\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,b^4\,\text{cos}.\,4\,\Phi,$$

quae ergo formula conſtat quatuor membris, quorum primum tantum in integratione eſt conſiderandum, propterea quod ſequentes termini integrati darent ſin. Φ; ſin. $2\,\Phi$; ſin. $3\,\Phi$ et ſin. $4\,\Phi$, qui poſito $\Phi = \pi$ omnes in nihilum abeunt, ita vt pro hoc caſu ſit $\int v\,v\,\partial\,\Phi = \pi\,(2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4)$, quamobrem tota coni ſuperficies erit $S = \pi\,c\,f - \frac{\pi\,b\,b\,c^3}{4\,f^3} - \frac{\pi\,b^4\,c}{64\,f^3}$, quae formula iam multo propius ad veritatem accedit, quam ea quae caſu primo eſt inuenta.

Caſus III.

quo approximatio in quarto termino ſiſtitur.

§. 9. Hic igitur ad expreſſionem modo inuentam inſuper adiici debet valor, qui ex hac formula integrali reſultat: $\frac{1.\,1.\,3}{2.\,4.\,6}\,\frac{c}{f^5}\int v^3\,\partial\,\Phi$, poſtquam ſcilicet poſitum fuerit $\Phi = \pi$. Modo autem vidimus eſſe

$$v\,v = 2\,b\,b\,c\,c + \tfrac{1}{8}\,b^4 + b^3\,c\,\text{cos}.\,\Phi + 2\,b\,b\,c\,c\,\text{cos}.\,2\,\Phi$$
$$+ b^3\,c\,\text{cos}.\,3\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,b^4\,\text{cos}.\,4\,\Phi,$$

quae forma per $v = 2\,b\,c\,\text{cos}.\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,b\,b\,\text{cos}.\,2\,\Phi$ multiplicata, retentis tantum terminis conſtantibus, qui facta reductione ſupererunt, dabit

$$v^3 = b^4\,c\,c + \tfrac{1}{2}\,b^4\,c\,c = \tfrac{3}{2}\,b^4\,c\,c,$$

vnde fit $\int v^3\,\partial\,\Phi = \tfrac{3}{2}\,\pi\,b^4\,c\,c$, ita vt pars adiicienda ſit $\frac{3\,\pi\,b^4\,c^3}{32\,f^5}$, conſequenter adiecta etiam hac parte habebimus accuratius

$$S = \pi\,c\,f - \frac{\pi\,b\,b\,c^3}{4\,f^3} - \frac{\pi\,b^4\,c}{64\,f^3} + \frac{3\,\pi\,b^4\,c^3}{32\,f^5}.$$

§. 10.

§. 10. Contemplemur hic casum, quo obliquitas b ipsi radio baseos est aequalis, siue vbi perpendiculum A B in ipsum punctum F incidit. Facto igitur $b = c$, superficies huius coni, dum approximatio vsque ad quartum terminum producitur, erit

$$S = \pi c f - \frac{17 \pi c^5}{64 f^3} + \frac{3 \pi c^7}{32 f^5}, \text{ siue}$$

$$S = \pi c f \left(1 - \frac{17 c^4}{64 f^4} + \frac{3 c^6}{32 f^6}\right),$$

vbi notetur esse $ff = aa + \frac{3}{2} cc$. Haec expressio eo propius ad veritatem accedit, quo maior fuerit quantitas f prae radio basis c. Ita si altitudo coni diametro baseos aequetur, ita vt sit $ff = \frac{11}{2} cc$, tum superficies huius coni erit

$$S = \pi c \sqrt{\tfrac{11}{2}} \cdot \left(1 - \frac{17}{16.121} + \frac{3}{4.1331}\right),$$

quae partes in vnam contractae praebent superficiem coni

$$S = \tfrac{21121}{21296} \pi c \sqrt{\tfrac{11}{2}}.$$

§. 11. Hanc autem approximandi methodum non ad plures terminos prosequimur, quoniam calculus nimis fieret molestus, neque vlla lex progressionis perspici posset. Plerumque autem approximatio postrema sufficere posse videtur, dummodo quantitas f notabiliter superet ambas quantitates b et c. Tentemus autem aliam methodum, quae quidem pariter postulat vt altitudo coni a plurimum superet bina reliqua elementa b et c, quae autem quandam legem progressionis pollicetur, ita vt approximationem pro lubitu continuo vlterius persequi liceat.

Alia methodus
approximandi quando a multum superat b et c.

§. 12. Hic scilicet formulam $(c + b \cos.\Phi)^2$ non euoluemus, sed cum sit per seriem

$$\sqrt{[aa+(c+f\,\text{cof.}\,\Phi)^2]} = a + \frac{1}{2}\,\frac{(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{a} - \frac{1.1}{2.4}\,\frac{(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^4}{a^3}$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^6}{a^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\,\frac{(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^8}{a^7} + \text{etc.}$$

fingulas poteftates pares ipfius $c+b\,\text{cof.}\,\Phi$ ita euoluamus, vt ftatim omnes poteftates ipfius cof. Φ ad cofinus fimplices revocemus; tum enim omnia membra per quempiam cofinum affecta tuto reiicere poterimus, propterea quod in integratione praebent finus angulorum multiplorum ipfius Φ, qui pofito $\Phi = \pi$ omnes in nihilum effent abituri.

§. 13. Quo igitur hoc negotium facilius expediri queat, ante omnia obferuaffe iuuabit, omnes poteftates impares ipfius cof. Φ nullam fuppeditare quantitatem abfolutam, ita vt has poteftates penitus omittere liceat; ex poteftatibus autem paribus fequentes nafcuntur quantitates abfolutae:

$$\text{cof.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2};$$
$$\text{cof.}\,\Phi^4 = \tfrac{1.3}{2.4};$$
$$\text{cof.}\,\Phi^6 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6};$$
$$\text{cof.}\,\Phi^8 = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8};\ \text{etc.}$$

Iuxta hanc igitur regulam poteftates pares binomii $c+b\,\text{cof.}\,\Phi$ euoluamus eritque:

$$(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^2 = cc + \tfrac{1}{2}\,bb,$$
$$(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^4 = c^4 + 3\,bbcc + \tfrac{1.3}{2.4}\,b^4,$$
$$(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^6 = c^6 + \tfrac{15}{2}\,bb\,c^4 + \tfrac{1.3.15}{2.4}\,b^4\,cc + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\,b^6.$$

Quin etiam res in genere hoc modo expedietur:

$$(c+b\,\text{cof.}\,\Phi)^{2n} = c^{2n} + \frac{2n}{1}\,\frac{(2n-1)}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,b^2\,c^{2n-2}$$
$$+ \frac{2n}{1}\,.\,\frac{2n-1}{2}\,.\,\frac{2n-2}{3}\,.\,\frac{2n-3}{3}\,.\,\frac{1.3}{2.4}\,b^4\,c^{2n-4}$$
$$+ \frac{2n}{1}\,.\,\frac{2n-1}{2}\,.\,\frac{2n-2}{3}\,.\,\frac{2n-3}{4}\,.\,\frac{2n-4}{5}\,.\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\,b^6\,c^{2n-6} + \text{etc.}$$

§. 14.

§. 14. Introducamus nunc iſtos valores in ſeriem pro $\sqrt{[aa + (c + b \operatorname{coſ.} \Phi)^2]}$ exhibitam, et ſtatim per πc multiplicemus, atque integra coni ſuperficies ſequenti modo exprimetur:

$$S = \pi c a + \frac{1 \pi c}{2 a}(cc + \tfrac{1}{2} bb) - \frac{1.1.\pi c}{2.4 a^3}(c^4 + 3 bbcc + \frac{1.3}{2.4} b^4)$$
$$+ \frac{1.1.3 \pi c}{2.4.6 a^5}(c^6 + \tfrac{15}{2} bb c^4 + \frac{1.3.15}{2.4} . b^4 cc + \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6)$$
$$- \frac{1.1.3.5 \pi c}{2.4.6.8 a^7}(c^8 + \frac{8.7.1}{1.2.2} bb c^6 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} . \frac{1.3}{2.4} b^4 c^4$$
$$+ \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} . \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 cc + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} b^8).$$

§. 15. Quodſi ex ſingulis membris terminos tantum primos excerpamus, ii conſtituent hanc ſeriem:

$$\pi c (a + \frac{1 cc}{2 a} - \frac{1.1}{2.4} . \frac{c^4}{a^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6} . \frac{c^6}{a^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} . \frac{c^8}{a^7} + \text{etc.})$$

quae ſeries manifeſto conuenit cum ea quam formula $\sqrt{(aa + cc)}$ producit, quamobrem loco omnium terminorum primorum ſcribere licebit $\pi c \sqrt{(aa + cc)}$. Simili modo ſecundos terminos ſingulorum membrorum excerpamus, qui dabunt hanc ſeriem:

$$\frac{\pi bbc}{2}(\frac{1}{2a} - \frac{1.1.6 cc}{2.4 a^3} + \frac{1.1.3.15 c^4}{2.4.6 a^5} - \frac{1.1.3.5.28 c^6}{2.4.6.8 a^7} \text{etc.}), \text{ ſiue}$$

$$\frac{\pi bbc}{2a}(\tfrac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} . \frac{4.3}{1.2} . \frac{cc}{aa} + \frac{1.1.3}{2.4.6} . \frac{6.5}{1.2} . \frac{c^4}{a^4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} . \frac{8.7}{1.2} . \frac{c^6}{a^6} \text{etc.})$$

quae etiam hoc modo repraeſentari poteſt:

$$\frac{\pi bbc}{4a}(1 - \tfrac{3}{2} . \frac{cc}{aa} + \frac{3.5}{2.4} . \frac{c^4}{a^4} - \frac{3.5.7}{2.4.6} . \frac{c^6}{a^6} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} . \frac{c^8}{a^8} \text{etc.})$$

cuius ſeriei valor manifeſto eſt $(1 + \frac{cc}{aa})^{-\frac{3}{2}}$, ita vt ſumma omnium terminorum ſecundorum ſit $= \dfrac{\pi aabbc}{4(aa + cc)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 16. Colligamus eodem modo omnia tertia membra ſingulorum terminorum, qui omnes affecti ſunt poteſtate b^4 et conſtituunt hanc ſeriem:

$$-\frac{1.1}{2.4}\pi c.\frac{1.5}{2.4}.\frac{b^4}{a^3}+\frac{1.1.3}{2.4.6}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\frac{b^4 cc}{a^5}$$
$$-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{b^4 c^4}{a^7}+\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\pi c.\frac{1.3}{2.4}.$$
$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.\frac{b^4 c^6}{a^9}.\ \text{etc.}$$

qui termini reducuntur ad ſequentem expreſſionem:

$$-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{2\,4\,a^3}\left(3.1.-\frac{3.5.3}{2}.\frac{cc}{aa}+\frac{3.5.7.5}{2.4}.\frac{c^4}{a^4}-\frac{3.5.7.9.7}{2.4.6}.\frac{c^6}{a^6}+\text{etc.}\right)$$

§. 17. Iſta ſeries ſequenti modo in clariorem ordinem redigi poterit:

$$-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{8a^3}\left(1-\frac{5.3}{2}.\frac{cc}{aa}+\frac{5.7.5}{2.4}.\frac{c^4}{a^4}-\frac{5.7.9.7}{2.4.6}.\frac{c^6}{a^6}+\text{etc.}\right).$$

Ponamus hic breuitatis gratia $\frac{cc}{aa}=xx$, atque factorem communem $-\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi b^4 c}{8a^3}$ multiplicari oportebit per hanc ſeriem:

$$s=1-\frac{5.3}{2}xx+\frac{5.7.5}{2.4}x^4-\frac{5.7.9.7}{2.4.6}x^6+\frac{5.7.9.11.9}{2.4.6.8}x^8-\text{etc.}$$

Haec ſeries iam ſatis eſt regularis, et niſi poſtremi factores numerici adeſſent, eius ſummatio in promptu foret. Ad hos igitur factores tollendos vtamur integratione, ac reperiemus

$$\int s\,\partial x=x-\tfrac{5}{2}x^3+\frac{5.7}{2.4}x^5-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^7+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}x^9-\text{etc.}$$

Nouimus autem eſſe

$$(1+xx)^{-\frac{5}{2}}=1-\tfrac{5}{2}xx+\frac{5.7}{2.4}x^4-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^6+\text{etc.},$$

vnde patet fore $\int s\,\partial x=x(1+xx)^{-\frac{5}{2}}$, hincque differentiando colligitur

$$s=(1+xx)^{-\frac{5}{2}}-5xx(1+xx)^{-\frac{7}{2}},\ \text{ſiue}$$

$$s=\frac{1-4xx}{(1+xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

§. 18.

§. 18. Restituamus nunc loco xx valorem $\frac{cc}{aa}$, fietque $s = \frac{a^5(aa - 4cc)}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}}$, qui valor multiplicatus per factorem communem $-\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi b^4 c}{8 a^3}$, dabit summam omnium terminorum tertiorum, quae ergo erit

$$= -\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi aab^4 c}{8.} \cdot \frac{aa - 4cc}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}};$$

quamobrem si istae summae terminorum primorum, secundorum ac tertiorum coniungantur, pro superficie nostri coni scaleni nanciscemur sequentem expressionem:

$$S = \pi c \sqrt{(aa+cc)} + \frac{\pi aabbc}{4(aa+cc)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi aab^4 c(aa - 4cc)}{8(aa+cc)^{\frac{7}{2}}},$$

ita vt tantum supersit insuper terminos quartos, quintos etc. inuestigare, quos autem plerumque negligere licebit. Facile autem intelligitur, si etiam hos terminos summare voluerimus, denominatores futuros esse $(aa+cc)^{\frac{11}{2}}$; $(aa+cc)^{\frac{15}{2}}$ etc. verum numeratores nimis operosum foret explorare.

§. 19. Tentemus igitur summationem terminorum quartorum, qui adhibita simili operatione talem progressionem suppeditant, cuius factor communis est

$$\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{3.5}{1.2 \ldots 6} \cdot \frac{\pi b^6 c}{a^5} = \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{\pi b^6 c}{a^5}$$

in quem duci debebit haec series:

$$3 - \frac{7.5.3}{2} \cdot \frac{c^2}{a^2} + \frac{7.9.7.5}{2.4} \cdot \frac{c^4}{a^4} - \frac{7.9.11.9.7}{2.4.6} \cdot \frac{c^6}{a^6} + \frac{7.9.11.13.11.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{c^8}{a^8} \text{ etc.}$$

Fiat igitur iterum $\frac{cc}{aa} = xx$, ac ponatur

$$s = 3 - \frac{7.5.3}{2} xx + \frac{7.9.7.5}{2.4} x^4 - \frac{7.9.11.9.7}{2.4.6} x^6 + \frac{7.9.11.13.11.9}{2.4.6.8} x^8 \text{ etc.}$$

cuius

cuius ergo ſeriei ſummam indagari oportet, id quod ſequenti modo ſumus expedituri.

§. 20. Primo ſcilicet, vt factores poſtremi tollantur, per integrationem formetur iſta ſeries:

$$\int s\,\partial x = 3\,x - \frac{7.5}{2}\,x^3 + \frac{7.9.7}{2.4}\,x^5 - \frac{7.9.11.9}{2.4.6}\,x^7 + \frac{7.9.11.13.11}{2.4.6.8}\,x^9 \text{ etc.}$$

Vt nunc hinc denuo vltimos factores tollamus, multiplicemus per $x\,\partial x$ et integrando reperiemus

$$\int x\,\partial x \int s\,\partial x = x^3 - \tfrac{7}{2}\,x^5 + \frac{7.9}{2.4}\,x^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6}\,x^9 + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}\,x^{11} \text{ etc.}$$

Cum igitur ſit

$$(1+xx)^{-\frac{7}{2}} = 1 - \tfrac{7}{2}\,xx + \frac{7.9}{2.4}\,x^4 - \frac{7.9.11}{2.4.6}\,x^6 + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}\,x^8 \text{ etc.}$$

manifeſtum eſt fore

$$\int x\,\partial x \int s\,\partial x = x^3\,(1+xx)^{-\frac{7}{2}}$$

cuius differentiale per $x\,\partial x$ diuiſum dabit

$$\int s\,\partial x = 3\,x\,(1+xx)^{-\frac{7}{2}} - 7\,x^3\,(1+xx)^{-\frac{9}{2}}$$

haecque formula denuo differentiata praebet

$$s = 3\,(1+xx)^{-\frac{7}{2}} - 42\,xx\,(1+xx)^{-\frac{9}{2}} + 63\,x^4\,(1+xx)^{-\frac{11}{2}}$$

quae expreſſio porro reducitur ad hanc:

$$s = \frac{3 - 36\,xx + 24\,x^4}{(1+xx)^{\frac{11}{2}}}.$$

Scribendo igitur $\frac{cc}{aa}$ loco xx erit

$$s = \frac{a^7\,(3\,a^4 - 36\,aacc + 24\,c^4)}{(aa+cc)^{\frac{11}{2}}}$$

quae formula, ducta in factorem communem $\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{\pi\,b^6\,c}{a^5}$, praebet

bet ſummam omnium terminorum quartorum

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{\pi a a b^6 c (3 a^4 - 36 a a c c + 24 c^4)}{(a a + c c)^{\frac{11}{2}}}.$$

§. 21. Euolutio iſta poſtrema nobis hoc eximium commodum praeſtat, vt etiam legem, qua ſequentium terminorum ſummae progrediuntur, patefaciat. Quemadmodum enim, ſi ſumma terminorum tertiorum ſtatuatur $= - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{\pi b^4 c}{a^3} \cdot s$, poſito $\frac{c c}{a a} = x x$, pro s peruenimus ad hanc aequationem: $\int s \partial x = x (1 + x x)^{-\frac{5}{2}}$, ita pro terminis quartis, ſi earum ſumma ponatur $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{\pi b^6 c}{a^5} s$, pro s inuenimus hanc aequationem: $\int x \partial x \int s \partial x = x^3 (1 + x x)^{-\frac{7}{2}}$. Hoc modo facile patet, ſi ſumma terminorum quintorum ponatur $= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{\pi b^8 c}{a^7} \cdot s$, tum pro quantitate s inuenienda prodituram eſſe hanc aequationem:

$$\int x \partial x \int x \partial x \int s \partial x = x^5 (1 + x x)^{-\frac{9}{2}}.$$

Eodemque modo pro terminis ſextis, ſi eorum ſumma ſtatuatur $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdot \frac{\pi b^{10} c}{a^9} s$, tum quantitas s ex hac aequatione definiri debebit:

$$\int x \partial x \int x \partial x \int x \partial x \int s \partial x = x^7 (1 + x x)^{-\frac{11}{2}};$$

ſicque lex progreſſionis in infinitum penitus eſt manifeſta.

§. 22. Quoniam igitur ſummam terminorum quartorum nobis pariter euoluere licuit, eam inſuper ad ſummam praecedentium addamus, atque ſuperficies noſtri coni ſcaleni nunc accuratius ſequenti forma exprimetur:

$$\pi c\sqrt{(aa+cc)}+\frac{\pi aabbc}{2^2(aa+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1.3}{2^2.4^2}.\frac{\pi aab^4c(aa-4cc)}{(aa+cc)^{\frac{7}{2}}}$$
$$+\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2}.\frac{\pi aab^6c(3a^4-36aacc+24c^4)}{(aa+cc)^{\frac{11}{2}}}$$

quam formam ſemper adhibere licebit, quoties bb fuerit, valde paruum prae $aa+cc$, id quod duplici modo contingere poteſt, vel quando altitudo coni a plurimum ſuperat eius obliquitatem b, vel quando radius baſis c multum excedit obliquitatem b: atque ſi haec vtraque conditio locum habeat, iſta formula eo magis ad veritatem appropinquabit.

§. 23. Sin autem neutra harum conditionum locum inueniat, atque obliquitas b tam ratione altitudinis a quam radii baſeos c notabilem habeat magnitudinem, vel adeo hos terminos ſuperet, tum formula noſtra inuenta nullum plane vſum praeſtare poterit. His igitur caſibus maxima difficultas occurrit ſuperficiem coni definiendi, atque longe alia artificia deſiderantur, quorum beneficio iſta quaeſtio enodari queat.

§. 24. Conſideremus primo caſum, quo altitudo coni a penitus euaneſcit, ita vt pro elemento ſuperficiei habeamus hanc formulam: $\partial S=c\partial\Phi\sqrt{(c+b\cos.\Phi)^2}$, quam iam duplicavimus, ita vt integratione peracta tantum ſuperſit ſtatuere $\Phi=180^\circ=\pi$. Cum igitur ſignum radicale quadrato ſit praefixum, erit vtique $\partial S=c\partial\Phi(c+b\cos.\Phi)$, vnde integrando elicitur $S=cc\Phi+bc\sin.\Phi$, vnde facto $\Phi=180$ tota ſuperficies prodit $=\pi cc$, ſicque ipſi areae baſis erit aequalis, id quod per ſe eſt perſpicuum, quoties vertex coni intra baſin cadit; ſin autem extra baſin incidat, manifeſtum eſt ſuperficiem coni multo maiorem fore quam aream baſeos. Si enim talem conum charta

ob-

obducere voluerimus, euidens eſt eo maius ſpatium requiri, quo longius vertex coni extra baſin fuerit remotus.

§. 25. Ponamus igitur verticem coni extra baſin in A incidere, ita vt ſit $CA = b$, exiſtente radio $CE = CF = c$, tum vero ex A ducantur rectae AM et AN baſis tangentes ac manifeſtum eſt ex baſis portione MEN, ſi ex ſingulis punctis ad A rectae ductae intelligantur, produci aream ex area circuli et trilineo AMFN compoſitam. Deinde ex altera baſeos parte MFN, ſi pariter ex ſingulis punctis ad A rectae agerentur, area prodibit itidem trilineo AMFN aequalis, ita vt tota coni ſuperficies aequalis ſit areae baſeos vna cum hoc trilineo bis ſumto. Ad hanc igitur aream inueniendam vocemus angulum $ACM = \zeta$, et cum ſit $AC = b$, erit recta tangens $AM = b$ ſin. ζ, ideoque area trianguli $ACM = \frac{1}{2} bc$ ſin. ζ, a quo auferatur area ſectoris $FCM = \frac{1}{2} cc\zeta$, et remanebit area trilinei $AMF = \frac{1}{2} bc$ ſin. $\zeta - \frac{1}{2} cc\zeta$, cuius duplum dabit aream trilinei $AMFN = bc$ ſin. $\zeta - cc\zeta$, quamobrem tota ſuperficies huius coni, cuius altitudo a eſt quaſi infinite parua, erit $= \pi cc + 2bc$ ſin. $\zeta - 2cc\zeta$. Tab. I. Fig. 7.

§. 26. Cum igitur ſuper hac determinatione nullum dubium ſupereſſe poſſit, quaeritur, cur calculus hoc caſu tantopere a veritate abludat? Cauſa autem ſine vllo dubio in formula radicali $\sqrt{(c + b \operatorname{coſ.} \Phi)^2}$ latet, quae cum duplicem ſignificationem inuoluat, alteram poſitiuam, alteram negatiuam, natura noſtrae quaeſtionis manifeſto tantum valorem poſitiuum poſtulat. Quare cum poſuerimus $\partial S = c\,\partial\Phi\,(c + b \operatorname{coſ.} \Phi)$, haec poſitio eatenus tantum valet, quatenus quantitas $c + b$ coſ. Φ eſt poſitiua, at vero, dum angulus Φ vltra rectum augetur, quia coſ. Φ fit negatiuus, euadere poterit $c + b \operatorname{coſ.} \Phi = 0$, quando ſcilicet fit coſ. $\Phi = -\frac{c}{b}$. Quare cum ſupra, ducta tan-

 gente

gente AM, fuerit cof. ACM $= $ cof. $\zeta = \frac{c}{b}$, fequitur, fumto $\Phi = \pi - \zeta$ formulam $c + b$ fof. Φ euanefcere; fin autem angulus Φ vltra hunc terminum augeatur, eius valor euadet negatiuus, atque in locum formulae radicalis fubftitui debebit $- c - b$ cof. Φ.

§. 27. Ob hunc duplicem vfum formulae radicalis perfpicuum eft, integrationem formulae noftrae differentialis in duas partes diftribui debere, quarum prior petenda erit ex formula $\partial S = c \partial \Phi (c + b \text{ cof. } \Phi)$, cuius integrale a $\Phi = 0$ tantum vsque ad terminum $\Phi = \pi - \zeta$ extendi debet, hinc ergo colligetur

$$S = c c (\pi - \zeta) + b c \text{ fin. } \zeta;$$

alteram vero partem ex formula

$$\partial S = - c \partial \Phi (c + b \text{ cof. } \Phi)$$

deduci oportet, cuius integrale a termino $\Phi = \pi - \zeta$ vsque ad terminum $\Phi = \pi$ extendi debet. Cum igitur integrale hinc oriundum fit $S = C - c c \Phi - b a \text{ fin. } \Phi$, conftans ita definiatur, vt hoc integrale euanefcat, fumto $\Phi = \pi - \zeta$; eritque idcirco $C = c c (\pi - \zeta) + b c \text{ fin. } \zeta$. Fiat igitur nunc $\Phi = \pi$, atque altera pars noftri integralis erit $= b c \text{ fin. } \zeta - c c \zeta$, quae cum parte prius inuenta praebet totam huius coni fuperficiem

$$\pi c c + 2 b c \text{ fin. } \zeta - 2 c c \zeta,$$

quia iam valor cum veritate egregie confpirat.

§. 28. Hoc cafu, quo $a = 0$ expedito, facile patet, etiam illis cafibus, quibus altitudo a eft valde parua, refolutionem bipartitam inftitui debere. Verum hic ftatim maxima fe offert difficultas in euolutione formulae radicalis

$$\sqrt{a a + (c + b \text{ cof. } \Phi)^2}.$$

Cum

Cum enim altitudo a ſit valde exigua, ſeries more ſolito hinc nata prodit ita expreſſa:

$$c + b\,\mathrm{cof.}\,\Phi + \frac{1}{2}\,\frac{aa}{c+b\,\mathrm{cof.}\,\Phi} - \frac{1.1}{2.4}\,\frac{a^4}{(c+b\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{a^6}{(c+b\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^5}\ \text{etc.}$$

quae ſeries vtique valde conuergit, quando formula $c+b\,\mathrm{cof.}\,\Phi$ multum ſuperat altitudinem a. Quoniam autem pariter transeundum eſt per eos caſus, quibus eſt $c+b\,\mathrm{cof.}\,\Phi = 0$, poſt primum terminum ſequentes omnes in infinitum abeunt, ideoque a veritate maxime abhorrent, atque adeo nullum adhuc artificium in Analyſi eſt repertum, quo huic incommodo medela afferri poſſet. His igitur caſibus recurrendum erit ad dimenſionem practicam, qua totam ſuperficiem coni in plures partes partiri et ſingularum areas ſeorſim exquirere ſolemus, id quod commodiſſime fiet, ſi ſuperficies coni in planum explicetur, cui operationi ſequens problema eſt deſtinatum.

Problema.

Si ſuperficies coni ſcaleni in planum explicetur, indolem figurae, quae hinc naſcetur, explorare.

Solutio.

§. 29. Concipiamus cono A E G F H, quem in figura 5 et 6 ſumus contemplati, chartam circumuolui, eamque iterum explicari in planum, veluti fig. 8. indicat, vbi A reſpondeat vertici coni, rectae autem A E et A F exhibeant latus maximum et minimum coni, ita vt area figurae E A F dimidiae ſuperficiei conicae ſit aequalis. Manentibus igitur denominationibus ſupra adhibitis, ſcilicet altitudine coni $AB = a$, obliquitate $BC = b$ et radio baſis $CE = CF = c$, erit in praeſenti figura latus maximum $AE = \sqrt{aa + (b+c)^2}$, latus vero minimum $AF = \sqrt{aa + (b-c)^2}$, longitudo autem curuae Tab. I. Fig. 8.

E S F aequabitur semiperipheriae baseos coni, quae est πc. Euidens autem est istam curuam plurimum a natura circuli recedere, cuius ergo indolem et proprietates hic indagari oportet.

§. 30. Cum triangulum elementare A S s (fig. 6.) in ipsa superficie coni sit assumtum, id nunc in nostro plano reperietur, et quoniam rectae S P et A P in plano trianguli erant sitae, eae etiamnunc in nostrum planum incident, eritque recta S P tangens curuae in puncto S, recta vero A P erit perpendiculum ex puncto A in hanc tangentem demissum; portio vero curuae E S aequabitur arcui circulari E S $= c\,\Phi$, (fig. 6.) posito scilicet angulo E C S $= \Phi$. Quodsi ergo nunc has rectas vocemus A S $= v$, A P $= p$ et S P $= q$, erit ex iis quae supra attulimus $p = aa + (c + b \cos.\Phi)^2$ et $qq = bb \sin.\Phi_2$, siue $q = b \sin.\Phi$, vnde fit

$$vv = pp + qq = aa + bb + cc + 2bc \cos.\Phi.$$

Hinc autem si vocemus aream E A S $=$ S, vt ∂S exprimat aream trianguli elementaris A S s, erit vti supra inuenimus

$$\partial S = \tfrac{1}{2} c\,\partial\Phi \sqrt{aa + (c + b \cos.\Phi)^2} = \tfrac{1}{2} c p\,\partial\Phi.$$

Quodsi iam vocemus angulum E A S $= \omega$, vt sit angulus S A s $= \partial\omega$, ob A S $= v$ area eiusdem trianguli erit $= \tfrac{1}{2} vv\,\partial\omega$, quamobrem habebitur haec aequatio: $vv\,\partial\omega = cp\,\partial\Phi$, ideoque $\partial\omega = \frac{cp\partial\Phi}{vv}$, siue habebimus

$$\partial\omega = \frac{c\,\partial\Phi\sqrt{aa + (c + b \cos.\Phi)^2}}{aa + bb + cc + 2bc \cos.\Phi},$$

cuius ergo integrale nobis praebebit ipsum angulum E A S, angulo Φ respondentem; ac si tum fiat $\Phi = 180° = \pi$, prodibit angulus E A F, cuius ergo determinatio maxime est difficilis, cum neque per logarithmos neque per arcus circulares expediri queat.

§. 31.

§. 31. At vero haec figura continet alia ſymptomata, quae ſatis concinne exprimere licet. Primo ſcilicet, ſi angulus, quem tangens S P cum recta A S conſtituit, vocetur A S P $= \theta$, ſtatim habemus

$$\text{ſin.}\, \theta = \frac{p}{v} = \frac{\sqrt{aa + (c + b\, \text{coſ.}\, \Phi)^2}}{\sqrt{(aa + bb + cc + 2bc\, \text{coſ.}\, \Phi)}} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, \theta = \frac{q}{v} = \frac{b\, \text{ſin.}\, \Phi}{\sqrt{(aa + bb + cc + 2bc\, \text{coſ.}\, \Phi)}},$$

vnde patet in ipſo puncto E, vbi $\Phi = 0$, fieri coſ. $\theta = 0$, ideoque rectam A E ad curuam in E eſſe normalem, quod idem quoque euenit in puncto F, vbi $\Phi = \pi$, ita vt in ambobus terminis E et F rectae A E et A F curuae normaliter inſiſtant; in punctis autem intermediis rectae A S cum curua angulos obliquos conſtituent, quemadmodum ex quantitate tangentis S P eſt manifeſtum. Vbi imprimis notaſſe iuuabit, ſi punctum S capiatur in ipſo puncto G (fig. 5.), vbi eſt $\Phi = 90^\circ$, tum quantitatem tangentis S P $= q$ fore $= b$, ideoque ipſi obliquitati coni aequalem. In omnibus autem reliquis punctis iſta tangens S P $= q$ minor erit quam obliquitas b.

§. 32. Praeterea vero etiam ipſam curuaturam noſtrae curuae E S F in ſingulis punctis S ſatis concinne exprimere licet. Si enim radium oſculi in puncto S deſignemus littera r, conſtat, eum ex perpendiculo in tangentem A P $= p$ ita exprimi, vt ſit $r = \frac{v\, \partial v}{\partial p}$. Cum igitur ſit

$$v\, \partial v = - b c\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi \text{ et}$$

$$p\, \partial p = - b\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi\, (c + b\, \text{coſ.}\, \Phi), \text{ ideoque}$$

$$\partial p = - \frac{b\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi\, (c + b\, \text{coſ.}\, \Phi)}{p},$$

his valoribus ſubſtitutis reperitur radius oſculi $r = \frac{cp}{c + b\, \text{coſ.}\, \Phi}$, vnde ſequitur in ipſo puncto E, vbi $\Phi = 0$, radium oſculi fore

$$r = \frac{cp}{c + b} = \frac{c\sqrt{aa + (c + b)^2}}{c + b};$$

at

at vero in altero termino F, vbi $\Phi = \pi$, radius osculi erit

$$r = \frac{cp}{c-b} = \frac{c\sqrt{aa+(c-b)^2}}{c-b}.$$

Vnde patet, si fuerit $b > c$, hoc est iis casibus, quibus altitudo A B extra basin cadit, tum radium osculi in F fore negatiuum, ideoque curuam in hoc loco conuexitatem versus A obvertere; contra autem, quamdiu fuerit $b < c$, tum totam curvam vbique versus A fore concauam.

§. 33. Quodsi porro longitudinem curuae E S ponamus $= s$ ita vt sit $s = c\Phi$, notum est formulam integralem $\int \frac{\partial s}{r}$ exprimere amplitudinem arcus curuae E S, quae si designetur littera ψ, erit $\partial \psi = \frac{\partial s}{r}$, quamobrem substitutis valoribus pro ∂s et r inuentis habebimus

$$\partial \psi = \frac{\partial \Phi (c + b \cos. \Phi)}{\sqrt{aa + (c + b \cos. \Phi)^2}},$$

cuius formulae integratio, etiamsi pariter expediri nequeat, tamen multo simplicior est censenda illa, qua $\partial \omega$ exprimebatur. Inuento autem hoc angulo ψ, ex eo quoque ipsum illum angulum ω definire licebit. Ducta enim ex S ad rectam A E perpendiculari S X, angulus E S X ipsam curuae amplitudinem metitur; quare cum etiam angulus A S P $= \theta$ sit cognitus, erit angulus A S X $= 180 - \theta - \psi$, qui cum etiam sit $= 90° - \omega$, reperietur ipse angulus $\omega = \theta + \psi - 90°$, sicque integratione formulae illius difficillimae pro $\partial \omega$ inuentae supersedere poterimus.

§. 34. Ex his iam, quae hactenus sunt allata, ipsa curua E S F haud difficulter in plano describi poterit, quae si in plures partes diuidatur, singularum partium areae facili negotio practice mensurari poterunt, quae in vnam summam collectae dabunt superficiem coni scaleni propositi. Caeterum hic

silentio

ſilentio non eſt praetereundum, quoniam haec figura per expl:-nationem chartae tam facile exhiberi poteſt, hinc eximium exemplum curuae maxime transcendentis obtineri, cuius nihilominus deſcriptio facillime expediri queat.

Additamentum ad §. 21.

Quodſi formulas in §. 21. traditas euoluamus, atque ſimili modo, vt ibi coepimus, ſummas terminorum quintorum, ſextorum et ſequentium actu definiamus, ſeriem haud inelegantem pro ſuperficie coni ſcaleni exhibere poterimus. Quodſi enim breuitatis gratia ponamus $c = a x$ et $\sqrt{(1 + x x)} = u$, tota coni ſcaleni ſuperficies erit $= \pi a a x u . V$, denotante V ſummam ſequentis ſeriei:

$$\begin{aligned} V = 1 &+ \frac{1}{2^2} \frac{b b}{1. a a} . \frac{1}{u^4} - \frac{1.3}{2^2.4^2} . \frac{b^4}{3. a^4} . \left(\frac{1.3}{u^6} - \frac{3.5 x x}{u^8}\right) \\ &+ \frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} . \frac{b^6}{5. a^6} \left(\frac{1.3.5}{u^8} - 2. \frac{3.5.7. x x}{u^{10}} + \frac{5. .9. x^4}{u^{12}}\right) \\ &+ \frac{1.3.5.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} . \frac{b^8}{7. a^8} \left(\frac{1.3.5.7}{u^{10}} - 3. \frac{3.5.7.9. x x}{u^{12}} + \frac{3.5.7.9.11. x^4}{u^{14}} - \frac{7.9.11.13. x^6}{u^{16}}\right) \\ &+ \frac{1.3.5. .9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} \frac{b^{10}}{9. a^{10}} \left(\frac{1.3.5.7.9}{u^{12}} - 4. \frac{3. \ldots 11. x x}{u^{14}} + 6. \frac{5. \ldots 13. x^4}{u^{16}} \right. \\ &\quad \text{etc.} \qquad\qquad \left. - 4. \frac{7. \ldots 15. x^6}{u^{18}} + \frac{9. \ldots 17. x^8}{u^{20}}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Euidens autem eſt hanc ſeriem iis tantum caſibus vſum praeſtare, quibus quantitas $b b$ multo minor eſt quam formula $a a + c c$, quando autem propemodum eſt aequalis, vel adeo maior, tum neceſſario confugiendum erit ad deſcriptionem illam practicam, quam ſupra expoſuimus.

DE PROPRIETATIBVS QVIBVSDAM ELLIPSEOS IN SVPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTAE.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 25 *Octobris* 1787.

§. 1.

Pauca tantum exſtant ſpecimina illius doctrinae Sphaericorum partis, quae de figurarum linearumque curuarum in ſuperficie ſphaerae deſcriptarum proprietatibus agit. Super cetera in hoc genere eminent quae celeberrimus quondam Academicus noſter *Lexell*, circa Epicycloïdes in ſuperficie ſphaerae deſcriptas (*V. Acta Acad. Tom. III. P. I.*); circa lineam curuam, in qua collocantur vertices omnium triangulorum ſphaericorum eiusdem areae et baſis (*V. Acta Acad. T. V. P. I.*); circa circulorum in ſphaerae ſuperficie deſcriptorum proprietates planis analogas (*V. Acta Acad. T. VI. P. I.*); etc. exhibuit, inde occaſionem arreptus Geometrarum attentionem ad nouam Geometriae partem ex huiusmodi disquiſitionibus forte aliquando oriundam dirigendi. His viri beate defuncti ſpeciminibus praeclaris aliquot obſeruationes circa proprietates Ellipſis in ſuperficie ſphaerica deſcriptas, quae ſe mihi

mihi nuper obtulere, adiicere conſtitui, cum a nemine adhuc, quantum quidem memini, ſint obſeruatae.

§. 2. In hanc autem Ellipſis ſpeciem inquirendi anſam mihi praebuit inueſtigatio Maximorum quorundam ſphaericorum cum Academia non ita pridam communicata, praeſertim problema de triangulo ſuper data baſi in ſuperficie ſphaerica conſtruendo, cuius amborum laterum ſumma ſit omnium minima (*V. Noua Acta Tom. II.*). Cum enim, huius problematis ſolutione abſoluta, etiam quaeſtionem illi ſimilem aggrediebar: ſuper data baſi triangula ſphaerica conſtruere ita comparata, vt ſumma reliquorum laterum ſemper ſit eiusdem magnitudinis, ſtatim ſe obferebant proprietates quaedam Ellipſi planae analogae, vt et alia vlteriore indagatione digna, vnde hoc argumentum ſeorſim tractandum potius quam ad calcem diſſertationis modo memoratae annectendum exiſtimaui.

§. 3. Si in ſuperficie ſphaerica filum datae longitudinis in duobus punctis figatur ſtilique ope extendatur, curvam, quae ſtilum promouendo, ſuper ſphaera deſcribitur, ob hunc ipſum deſcribendi modum delineationi Ellipſis planae analogum *Ellipſin ſphaericam* vocare licebit, cuius curuae naturam et proprietates perſcrutari in animum induxi. Hunc in finem pono longitudinem fili $= 2c$ et amborum punctorum datorum A et B diſtantiam, ſiue arcum circuli maximi AB $= 2a$. Biſecetur autem arcus iſte AB in C, vt ſit CA $=$ CB $= a$; tum vero ſit MN arcus curuae deſcriptae, in eoque Y punctum quodcunque, vnde ad puncta A et B ducti concipiantur arcus circulorum maximorum YA et YB, quae poſitionem fili pro loco ſtili Y referant, demiſſoque perpendiculo in baſin YX, vocentur coordinatae ſphaericae CX $= x$, XY $= y$, ita vt ſit AX $= a + x$ et BX $= a - x$. Porro Tab. II. Fig. 1.

 voce-

vocetur arcus $AY = c + v$ et arcus $BY = c - v$, hocque enim modo ſumma arcuum $AY + BY = 2c$ aequetur longitudini fili, vti requiritur.

§. 4. His ſtabilitis conſideremus bina triangula ſphaerica rectangula AXY et BXY, ex quibus habebimus

$$\text{coſ. } AY = \text{coſ. } AX \,.\, \text{coſ. } XY,$$
$$\text{coſ. } BY = \text{coſ. } BX \,.\, \text{coſ. } XY,$$

ſiue adhibitis denominationibus modo ſtabilitis:

$$\text{coſ. } (c + v) = \text{coſ. } (a + x) \text{ coſ. } y;$$
$$\text{coſ. } (c - v) = \text{coſ. } (a - x) \text{ coſ. } y;$$

ſiue euoluendo:

$$\text{coſ.}c \text{ coſ.}v - \text{ſin.}c \text{ ſin.}v = \text{coſ.}y \text{ coſ.}a \text{ coſ.}x - \text{coſ.}y \text{ ſin.}a \text{ ſin.}x;$$
$$\text{coſ.}c \text{ coſ.}v + \text{ſin.}c \text{ ſin.}v = \text{coſ.}y \text{ coſ.}a \text{ coſ.}x + \text{coſ.}y \text{ ſin.}a \text{ ſin.}x.$$

Harum aequationum ſumma praebet

$$\text{coſ. } c \text{ coſ. } v = \text{coſ.} y \text{ coſ. } a \text{ coſ. } x;$$

differentia vero dat

$$\text{ſin. } c \text{ ſin. } v = \text{coſ.} y \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x,$$

ex quibus aequationem pro curua confici oportet.

§. 5. Multiplicetur prior harum aequationum per ſin. c, altera vero per coſ. c, vnde orientur ſequentes aequationes:

$$\text{ſin. } c \text{ coſ. } c \text{ coſ. } v = \text{ſin. } c \text{ coſ. } a \text{ coſ. } x \text{ coſ.} y;$$
$$\text{ſin. } c \text{ coſ. } c \text{ coſ. } v = \text{coſ. } c \text{ ſin. } a \text{ ſin. } x \text{ coſ.} y.$$

Sumatur ſumma quadratorum, quo quantitas v eliminetur, eritque

$$\text{ſin.}c^2 \text{ coſ.}c^2 = \text{coſ.}y^2 (\text{ſin.}c^2 \text{ coſ.}a^2 \text{ coſ.}x^2 + \text{coſ.}c^2 \text{ ſin.}a^2 \text{ ſin.}x^2),$$

quae aequatio ob ſin. $x^2 = 1 -$ coſ. x^2; ſin. $a^2 = 1 -$ coſ. a^2 et et $\sin. c^2 = 1 - \cos. c^2$, etiam hoc modo repraesentari potest:

$$\sin. c^2 \cos. c^2 = \cos. y^2 [\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)],$$

vnde colligitur

$$\cos. y = \frac{\sin. c \cos. c}{\sqrt{[\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)]}}.$$

§. 6. En igitur aequationem nacti sumus relationem coordinatarum x et y complectentem, quam sequentem in modum commodius repraesentare licebit. Ex aequatione modo inuenta habebitur:

$$\sin. y = \sqrt{\frac{\cos. c^2 (\sin. a^2 - \sin. c^2) + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}{\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}}.$$

Est vero $\sin. a^2 - \sin. c = -(\cos. a^2 - \cos. c^2)$, ergo

$$\sin. y = \sqrt{\frac{(\cos. a^2 - \cos. c^2)(\cos. x^2 - \cos. c^2)}{\cos. c^2 \sin. a^2 + \cos. x^2 (\cos. a^2 - \cos. c^2)}};$$

vnde porro haec expressio satis commoda eruitur:

$$\operatorname{tang}. y = \frac{\sqrt{(\cos. a^2 - \cos. c^2)(\cos. x^2 - \cos. c^2)}}{\sin. c \cos. c},$$

qua igitur aequatione, (quae etiam ita repraesentari potest:

$$\operatorname{tang}. y = \frac{\sqrt{(\sin. c^2 - \sin. a^2)(\sin. c^2 - \sin. x^2)}}{\sin. c \cos. c}),$$

natura curuae exprimitur.

§. 7. Consideremus casum quo fili longitudo aequatur semicirculo sphaerae maximo, ita vt sit $2c = 180°$, ideoque $c = 90°$, quo casu igitur applicata y, ob $\operatorname{tang}. y = \infty$, fit quadrans, ita vt punctum curuae Y caderet in polum circuli maximi, cuius arcus AB est portio, quantacunque fuerit abscissa CX $= x$, quo igitur casu curua vnico puncto constare videtur, cum tamen nihil obstet, quominus stilus promoueatur. Verum hoc dubium sequenti modo facile diluetur. Retento valore $c = 90°$, et sumtis in arcu circuli maximi AB, vtrinque prolongato, arcubus $CE = CF = 90^\circ$, quaeramus applicatam in punctis C, E, F, atque statim patet, posito $x = 0$, pro applicata in C fore

$$\text{tang.}\, y = \frac{\text{cof.}\, a\, \text{fin.}\, c}{\text{fin.}\, c\, \text{cof.}\, c} = \frac{\text{cof.}\, a}{\text{cof.}\, c} = \infty,$$

ideoque $y = 90^\circ$, ita vt pro puncto C applicata sit quadrans et Y in polo circuli maximi EF reperiatur. Tum vero ponatur $x = \pm c$, eritque pro applicata in punctis E et F, tang. $y = \frac{0}{0}$, ideoque
Tab. II. Fig. 2. indefinita. Hoc scilicet casu curua descripta erit circulus maximus basi AB, cuius polus incidit in ipsum punctum Y, in E et F normaliter insistens. Producto enim arcu AB vtrinque in E et F vsque, ita scilicet vt $CE = CF = 90^\circ$, circulus maximus EYF, ipsi ECF normaliter insistens, exhibebit hanc Ellipsin sphaericam. Sumto enim puncto X in ipso puncto E vel F applicata indefinita omnia dabit puncta in hoc circulo maximo, et in puncto C vtique erit $CY = 90^\circ$.

§. 8. Hinc ergo deducimus sequentem proprietatem maxime memorabilem. Si in superficiei sphaericae duobus punctis quibuscunque A et B, minus quam 180° a se inuicem distantibus, fili semicirculo maximo aequalis termini figantur & ope stili extendantur, stilum promouendo describitur circulus maximus, cuius polus in medio arcus AB, hoc est in C erit situs, cuius rei veritas cuilibet, super globo in suos Meridianos et Parallelos diuiso periculum facienti, mox in oculos incurret.

§. 9. Ex aequatione generali pro natura curuae inventa:

$$\text{tang.}\, y = \pm \frac{\sqrt{(\text{cof.}\, a^2 - \text{cof.}\, c^2)(\text{cof.}\, x^2 - \text{cof.}\, c^2)}}{\text{fin.}\, c\, \text{cof.}\, c},$$

Fig. 3. liquet, applicatam y euanescere casibus $x = \pm c$. Vnde patet, si circa punctum C vtrinque capiantur arcus $CE = CF = c$, curuam per haec duo puncta E et F transire, sicque haec puncta

puncta erunt vertices Ellipsis; et cum cuilibet abscissae, ob signum radicale ambiguum, duae respondeant applicatae, positiua scilicet et negatiua, arcus E C F referet axem Ellipseos sphaericae transuersum, cuius longitudo $EF = 2c$ longitudini fili aequalis, et in quo punctum C centrum, puncta A et B vero focos Ellipsis exhibent, quorum distantia $AB = 2a$. Porro si ad quoduis punctum curuae Y ducantur arcus A Y et B Y, eorum summa semper aequalis est axi transuerso E F.

§. 10. Quaeramus etiam semiaxem coniugatum nostrae Ellipsis. Statuamus hunc in finem abscissam $CX = x = 0$, fietque

$$\text{tang.}\, y = \frac{\sqrt{(\text{cos}.\, a^2 - \text{cos}.\, c^2)}}{\text{cos}.\, c} = \frac{\sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, a^2)}}{\text{cos}.\, c},$$

ita vt pro puncti C applicata C D sit

$$\text{tang.}\, CD = \frac{\sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, a^2)}}{\text{cos}.\, c};$$

vnde si semiaxis coniugatus vocetur $CD = g$, erit

$$\text{tang.}\, g = \frac{\sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, a^2)}}{\text{cos}.\, c},$$

existente pro semiaxe transuerso:

$$\text{tang.}\, CE = \text{tang.}\, CF = \text{tang.}\, c = \frac{\text{sin}.\, c}{\text{cos}.\, c},$$

qui valor, ob $\sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, a^2)} < \text{sin}.\, c$, certe maior est praecedente. Quodsi porro desideremus aequationem pro applicata abscissam vna cum semiaxe maiore et minore complectentem, vti pro Ellipsi plana quaeri solet, ob $\frac{\sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, a^2)}}{\text{cos}.\, c} = \text{tang}.\, g$, habebimus:

$$\text{tang.}\, y = \frac{\text{tang}.\, g}{\text{sin}.\, c} \sqrt{(\text{sin}.\, c^2 - \text{sin}.\, x^2)},$$

quam aequationem inter et illam, qua natura Ellipsis planae exprimitur, manifestus nexus subsistit. Denique ex ipsa curuae descriptione sequitur, ambos arcus A Y et B Y aequaliter ad curuam esse inclinatos.

§. 11.

§. 11. Quo autem naturam huius curuae accuratius perſcrutemur, in eius proiectionem ſuper plano quopiam factam inquiramus. Hoc autem planum ita accipiamus vt ſphaeram in ipſo Ellipſeos centro C tangat, ita vt, ſi Ellipſis fuerit quam minima, ea cum proiectione ipſa conueniat. Concipiamus igitur ſphaeram, vti in Aſtronomia fieri ſolet, referatque circulus H C K Meridianum, circulus vero H O K Horizontem, atque Ellipſeos ſphaericae centrum ſitum ſit in ipſo Zenith, ſeu puncto C, a quo foci Ellipſeos vtrinque diſtent interuallo $CA = CB = a$, longitudo vero fili ſit $= 2c$, ita vt, ſumtis arcubus $CE = CF = c$, puncta E et F ſint vertices Ellipſis, cuius ſi punctum quodcunque Y conſideretur, ad id ex centro C ducatur arcus $CY = z$, vocatoque angulo $ACY = \Phi$ ex his duobus elementis z et Φ binae coordinatae ſupra aſſumtae $CX = x$, $XY = y$ ita determinabuntur, vt ſit $\text{ſin.}\, y = \text{ſin.}\, z\, \text{ſin.}\, \Phi$ et $\text{tang.}\, x = \text{tang.}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi$

Tab. II. Fig. 4.

§. 12. Quoniam autem proiectio quaeſita fieri debet in planum quod ſphaeram in ipſo puncto C tangat, hoc planum erit parallelum ipſi Horizonti H O K; vnde quaeſito pariter ſatisfaciemus, ſi noſtram Ellipſin ſphaericam in Horizontem H O K proiiciamus. Hoc igitur planum in figura quinta ſeorſim repraeſentemus; vbi linea recta hck eſt proiectio Meridiani H C K et diametro ſphaerae aequalis, ita vt punctum medium c ipſum centrum ſphaerae, atque adeo proiectionem centri Ellipſeos C referat, quam proiectionem figura ſexta clarius ob oculos ponit.

Fig. 5 & 6.

§. 13. Statuatur igitur $ch = ck = 2$, capianturque in recta hk puncta a et b, focis A et B reſpondentia, eruntque interualla ca, cb ſinus arcuum C A et C B, quae ſi vocemus $ca = cb = A$, habebimus $\text{ſin.}\, a = A$. Simili modo ſint puncta

puncta e et f proiectiones verticum E et F, eruntque interualla ce, cf sinus arcuum CE, CF, positoque $ce = cf = C$, erit sin. $c = C$. Incidat porro punctum X in x et Y in y, voceturque interuallum $cy = Z$, atque euidens est fore sin. $z = Z$. Denique manifestum est in proiectione angulum acy aequalem esse angulo ACY, ideoque $acy = \Phi$. Vnde si in proiectione vocentur coordinatae $cx = X$ et $xy = Y$, erit Tab. II. Fig. 6. Fig. 5.

$$cx = X = cy \operatorname{cos}. \Phi = Z \operatorname{cos}. \Phi \text{ et}$$
$$xy = Y = cy \operatorname{sin}. \Phi = Z \operatorname{sin}. \Phi,$$

hincque $Z^2 = X^2 + Y^2$. Totum igitur negotium eo redit, vt elementa ante introducta x et y reuocentur ad has coordinatas X et Y.

§. 14. Quoniam igitur primo inuenimus sin. $y =$ sin. $z \times$ sin. Φ (§. 11.), erit sin. $y = Z$ sin. $\Phi = Y$, ideoque cos. $y = \sqrt{(1-YY)}$, atque tang. $y = \frac{Y}{\sqrt{(1-YY)}}$. Deinde vidimus esse (§. 11.)

$$\operatorname{tang}. x = \operatorname{tang}. z \operatorname{cos}. \Phi = \frac{\operatorname{sin}. z \operatorname{cos}. \Phi}{\operatorname{cos}. z} = \frac{Z \operatorname{cos}. \Phi}{\sqrt{(1-ZZ)}},$$

siue tang. $x = \frac{X}{\sqrt{(1-ZZ)}}$, vnde fit sin. $x = \frac{X}{\sqrt{(1+XX-ZZ)}}$, quae expressio ob $ZZ = XX + YY$, abit in hanc:

$$\operatorname{sin}. x = \frac{X}{\sqrt{(1-YY)}}.$$

§. 15. Substituamus nunc in aequatione supra inuenta:

$$\operatorname{tang}. y = \frac{\sqrt{(\operatorname{sin}. c^2 - \operatorname{sin}. a^2)(\operatorname{sin}. c^2 - \operatorname{sin}. x^2)}}{\operatorname{sin}. c \operatorname{cos}. c},$$

(§. 6.) loco tang. y et sin. x, valores modo erutos, atque aequatio, loco sin. c et sin. a scribendo C et A, hanc induet formam:

$$\frac{Y}{\sqrt{(1-YY)}} = \frac{\sqrt{(CC-AA)\left(CC-\frac{XX}{1-YY}\right)}}{C\sqrt{(1-CC)}},$$

 siue

siue sumtis vtrinque quadratis

$$\frac{YY}{1-YY} = \frac{CC-AA}{CC(1-CC)}\left(CC - \frac{XX}{1-YY}\right),$$

quae multiplicata per $CC(1-CC)(1-YY)$ abit in hanc:

$$CC(1-CC)YY = (CC-AA)(CC-CCYY-XX).$$

Addamus vtrinque $(CC-AA)CCYY$, vt litteram Y ad dextram partem tollamus, quo facto aequatio nostra ita se habet:

$$(1-AA)CCYY = (CC-AA)(CC-XX),$$

ex qua colligitur:

$$YY = \frac{(CC-AA)(CC-XX)}{CC(1-AA)}, \text{ ideoque}$$

$$Y = \frac{\sqrt{(CC-AA)(CC-XX)}}{C\sqrt{(1-AA)}},$$

vnde statim intelligitur proiectionem quaesitam esse Ellipsin.

Tab. II. Fig. 5. §. 16. Quo indolem huius curuae accuratius cognoscere queamus, consideremus attentius hanc aequationem, ac statim euidens est applicatam Y euanescere, sumto $X = \pm C$. Quare cum sit $ce = cf = C$, manifestum est puncta e et f fore vertices Ellipseos planae, et rectam ef eius axem transversum. Ponamus porro $X = 0$, quo casu applicata Y nobis dabit semiaxem coniugatum cd quem si vocemus $cd = G$, erit $G = \sqrt{\frac{CC-AA}{1-AA}}$. Quod autem focos attinet, probe notandum est eos non incidere in puncta proiectionis focorum Ellipseos sphaericae a et b, ipsis A et B respondentia. Ponamus enim focos Ellipsis planae reperiri in α et β, atque necesse est vt sit $c\alpha = c\beta = \sqrt{(CC-GG)}$. Modo autem invenimus $GG = \frac{CC-AA}{1-AA}$, vnde fit $c\alpha = c\beta = A\sqrt{\frac{1-CC}{1-AA}}$. Cum igitur sit $ca = cb = A$, manifestum est fore $(c\alpha = c\beta) < (ca = cb)$, propterea quod $C > A$, ideoque $\frac{1-CC}{1-AA} < 1$. Sicque distantia focorum in proiectione semper minor est quam

in

in Ellipsi sphaerica. Ceterum aequatio pro hac Ellipsi plana, introducto semiaxe minore $G = \sqrt{\frac{CC - AA}{1 - AA}}$, erit

$$Y = \frac{G}{C} \sqrt{(CC - XX)},$$

cum pro Ellipsi sphaerica fuisset

$$\text{tang.}\, y = \frac{\text{tang.}\, g}{\text{sin.}\, c} \sqrt{(\text{sin.}\, c^2 - \text{sin.}\, x^2)}.$$

§. 17. Euoluatur casus vbi $C = 1$, quod euenit si in Ellipsi sphaerica fili longitudo semicirculo maximo fuerit aequalis, quo casu distantia focorum $\alpha\beta$ penitus euanescit et aequatio pro proiectione fit $Y = \sqrt{(1 - XX)}$, quae ergo erit circulus radio $ck = cb = 1$ descriptus. Hoc scilicet casu, vti iam supra §. 8. obseruauimus, Ellipsis sphaerica fit circulus maximus in Horizontem incidens, ita vt eius proiectio sit ipse Horizon, ideoque etiam circulus, cuius radius $cb = ck = \text{sin.}\, c = 1$, quo ipso huius casus solutio supra §. 7. tradita magis confirmatur.

ANNOTATIONES AD THEOREMA XVI. LIB. V. PAPPI ALEXANDRINI.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 13 *Decembr.* 1787.

§. 1.

Quinque, qui ad nos peruenerunt, *Pappi Alexandrini* libri tot elegantes ingeniosasque continent propositiones, vt merito in Geometris desiderium excitent trium, quibus temporis iniuria nos priuauit, librorum. Eo magis autem ipsa, quae supersunt, attentione sunt digna, quod inter priscos Geometras maxime *Pappus* eiusmodi instituit disquisitiones, quae fines Geometriae Elementaris transscendere videntur, atque hodie post inuentum calculum infinitorum nonnisi Analyseos ope absolui solent, quae ideo optime ostendunt, quae inter syntheticam analyticamue methodum intercedit, differentiam. Sunt equidem nonnullae inter eius propositiones, vbi Analysis ad calculum ducit tam prolixum, vt Synthesis merito videatur praeferenda: plurimae autem eius sunt indolis, vt ingeniosa *Pappi* demonstratio Geometrica, licet per longas ambages procedens, tamen pro quocunque casu speciali aliter sit formanda; inprimis autem ipsa propositio adeo est determinata, vt Analysis idem obiectum via longe breuiore methodoque generalissima possit absoluere. Opus itaque mihi videtur haud inutile,

utile, analytice considerare obiectum, quod geometrice tractavit *Pappus*.

§. 2. Theorema, in quod hic commentaturus sum, *Pappi* verbis sic exprimitur:

Circuli portionum, quae aequalem circumferentiam habent, maxima est semicirculus.

Quodsi itaque (Fig. 7.) A F B sit semicirculus, et appelletur radius $CF = r$, arcus $DF = s$, angulus $DCF = \Phi$, patet, s esse constantem, r vero et Φ variabiles. Quaeruntur itaque casus, vbi area segmenti $DFEG = S$ sit Maximum. Quem in finem aequatione opus est inter S et s. Est autem area sectoris $DFEC = sr$, et trianguli Tab. II.

$$DCEG = CG \,.\, DG = rr \text{ sin. } \Phi \text{ cos. } \Phi.$$

Vnde fiet $S = sr - rr \text{ sin. } \Phi \text{ cos. } \Phi$; ex qua aequatione valor anguli Φ pro casu Maximi elici debet. Quia vero $\Phi = \frac{s}{r}$, erit $\partial \Phi = - \frac{s \partial r}{rr}$, ideoque

$$\frac{\partial s}{\partial r} = s - 2r \text{ sin. } \Phi \text{ cos. } \Phi + s \text{ cos. } \Phi^2 - s \text{ sin. } \Phi^2$$
$$= 2 \text{ cos. } \Phi \, (s \text{ cos. } \Phi - r \text{ sin. } \Phi).$$

Quae expressio duplici casu euanescit. Erit igitur S Maximum vel Minimum, 1.) si $\text{cos. } \Phi = 0$, 2.) si $s \text{ cos. } \Phi = r \text{ sin. } \Phi$, seu $\text{tang. } \Phi = \frac{s}{r} = \Phi$. Quodsi segmentum integram circuli peripheriam non excedere statuatur, vt nunquam $\Phi > \pi$; prior radix dat $\Phi = 90°$, seu arcum DFE semicirculo aequalem; posterior prodit angulum DCE infinite paruum, adeoque radium r infinitum, quia quantitas $s = \Phi r$ supponitur finita.

Inquiramus iam, vtra radix praebeat Maximum, vtra Minimum. Quem in finem $\frac{\partial s}{\partial r}$ iterum differentiari debet, fietque $\frac{\partial \partial s}{2 \partial r^2} = \frac{2 s^2}{r^2}$ fin. ϕ cof. ϕ — fin. ϕ cof. ϕ + $\frac{s}{r}$ cof. ϕ^2 — $\frac{s}{r}$ fin. ϕ^2, quod pro priore radice dat:

$$\frac{\partial \partial s}{2 \partial r^2} = - \phi \text{ fin. } \phi^2 = - \tfrac{1}{2} \pi;$$

pro fecunda:

$$\frac{\partial \partial s}{2 \partial r^2} = 2 \text{ tang. } \phi^2 \text{ fin. } \phi \text{ cof. } \phi - \text{fin. } \phi \text{ cof. } \phi + \text{tang. } \phi \text{ cof. } \phi^2$$
$$- \text{tang. } \phi \text{ fin. } \phi^2 = 2 \text{ tang. } \phi \text{ fin. } \phi^2 - \text{tang. } \phi \text{ fin. } \phi^2$$
$$= + \phi \text{ fin. } \phi^2.$$

Ergo radix pofterior Minimum praebet, prior Maximum. Et hunc poftremum quidem cafum folum *Pappus* confiderauit, eiusque veritatem plurimis ambagibus demonftrauit, primo fi $\phi < 90°$, deinde fi $\phi > 90°$.

§. 3. Operae pretium mihi videtur, rem adhuc follertius ac modo generaliore confiderare. Prior radix, cof. $\phi = 0$, dat non folum $\phi = \frac{1}{2}\pi$, fed etiam $\phi = \frac{3}{2}\pi$, $\phi = \frac{5}{2}\pi$, etc. feu totum arcum D F E $= \pi$, 3π, 5π, 7π, etc. Quotiescunque igitur area eft femicirculus, aut plures circulos integros cum femicirculo continet, toties ea fit Maximum. Sed omnes iftae areae minores funt ea, quae refultat cafu $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Sint enim generatim bini anguli ϕ et ψ ad radios r et ϱ pertinentes, et quidem $\phi = \frac{m}{2}\pi$, $\psi = \frac{n}{2}\pi$, et $n > m$. Erit nunc $s = \phi r = \psi \varrho$, ideoque $m r = n \varrho$, et $\varrho < r$. Binae autem areae erunt $\phi r r$ et $\psi \varrho \varrho$, h. e. in ratione $m r r : n \varrho \varrho = r : \varrho$, quia $m r = n \varrho$. Vnde ob $\varrho < r$ patet, areas femper euadere minores, quo plures circulos integros complectuntur. Vnde fequitur, cafum, $\phi = \frac{1}{2}\pi$ dare Maximum abfolutum feu Maximum inter Maxima, vt itaque propofitio *Pappi* fenfu ftrictiffimo vera fit.

§. 4.

§. 4. Quotiescunque autem est $\phi = \text{tang.}\,\phi$, toties area fit Minimum. Hoc non solum si ϕ infinite paruum, sed pro innumeris aliis anguli ϕ valoribus euenit. Si $\phi > 90^\circ$, tangentes inde a $(-\infty)$ vsque ad 0 decrescunt, dum arcus crescit. Ergo semel esse debet in secundo quadrante, $\phi = -\text{tang.}\,\phi$. Quoniam autem tangentes negatiui haud praebent Minimum, iste casus huc non pertinet. Facile vero patet, in tertio quadrante fieri oportere $\phi = \text{tang.}\,\phi$, quia, crescente ϕ, tang. ϕ a 0 vsque ad ∞ crescit. Idem de quinto, septimo, nono et quolibet quadrante numeri imparis euidens est. Sic e. gr. inuenitur in partibus radii

	arcus	257°	$27'$	$12''$	$13'''$	$= 4{,}49340934$
et tang. eiusdem arcus $=$	tang.	77	27	12	13	$= 4{,}49340924$
	arcus	442	37	27	32	$= 7{,}72525161$
	et tang.	82	37	27	32	$= 7{,}72524990$
	arcus	624	45	36	30	$= 10{,}90412143$
	et tang.	84	45	36	30	$= 10{,}90412394$

etc.

Ergo generaliter area fit Minimum, si $\phi > 0$, $< \frac{1}{2}\pi$, si $\phi > \pi$, $< \frac{3}{2}\pi$, si $\phi > 2\pi$, $< \frac{5}{2}\pi$, etc. Maximum autem, si $\phi = \frac{1}{2}\pi$, si $\phi = \frac{3}{2}\pi$, si $\phi = \frac{5}{2}\pi$, etc. vt itaque Maxima et Minima alternent, quemadmodum esse debebat. Ceterum patet, etiam hic primum Minimum esse absolutum Minimum, quia casu $\phi = 0$, area fit $= sr - rr\,\text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi = rr\,(\phi - \phi\,\text{cos.}\,\phi) = rr\,(\phi - \phi + \frac{1}{2}\phi^3) = \frac{1}{2}rr\phi^3 = 0$, quia exponens ipsius ϕ maior est exponente ipsius r. Hoc autem casu excepto omnia haec Minima eo erunt minora, quo maior ϕ, adeoque si ϕ in tertio quadrante, area erit Maximum quoddam inter haec Minima. Quia enim semper $\phi = m\pi + \psi$, vbi $\psi < 90^\circ$, erit semper tang. $\phi = \text{tang.}\,\psi$; et quoniam ϕ semper crescit, crescere quoque oportet tang. $\phi = \phi = \text{tang.}\,\psi$, vnde et ψ

semper

ſemper creſcit creſcente Φ. Sic in exemplis ſupra computatis valores ipſius ψ hoc ordine ſequebantur: $\psi = 77^\circ\, 27' \ldots$, $\psi = 82^\circ\, 37' \ldots$, $\psi = 84^\circ\, 45' \ldots$ His praeſuppoſitis eſt, caſu $\Phi =$ tang. Φ, area

$$S = s\,r - r\,r \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi = r\,r\,(\Phi - \text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi)$$
$$= r\,r\,(\Phi - \text{tang. } \Phi \text{ coſ. } \Phi^2) = r\,r\,\Phi \text{ ſin. } \Phi^2$$
$$= s\,r \text{ ſin. } \Phi^2 = \frac{s\,s \text{ ſin. } \Phi^2}{\Phi} = \frac{s\,s \text{ ſin. } \Phi^2}{\text{tang. } \Phi} = s\,s \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi$$
$$= \tfrac{1}{2}\, s\,s \text{ ſin. } 2\,\Phi,$$

vbi ob s conſtantem, areae cum ſin. $2\,\Phi$ creſcunt. In aequatione vero: $\Phi = m\,\pi + \psi$, ſemper eſt $\psi < 90^\circ$, et $\psi > 45^\circ$, quia, vt vidimus, ſemper creſcit, et primo caſu iam erat $\psi = 77^\circ\, 27' \ldots$ Ergo $2\,\psi$ ſemper $> 90^\circ$ et $2\,\psi < 180^\circ$; verum $2\,\Phi = 2\,m\,\pi + 2\,\psi$, vnde ſin. $2\,\Phi =$ ſin. $2\,\psi$, creſcente Φ ſemper decreſcit, quia ψ cum Φ ſimul creſcit. Adeoque et area decreſcit.

§. 5. Vlterius hanc disquiſitionem extendere mihi liceat et ad alias ſuperficies vel corpora applicare. Sit itaque primum A F B Hemiſphaerium, cuius radius C F $= r$. D E repraeſentet baſin ſegmenti ſphaerici D F E G, cuius altitudo F G $= a$, ſuperficies ſphaerica D F E $= s$, corpus D F E G $=$ S. Si nunc s ſtatuatur conſtans, et quaerantur Maxima et Minima corporis S: r et a ceu variabiles ſunt conſiderandae, quaeriturque ratio $\frac{a}{r}$, quae aequalis eſt ſinui verſo anguli D C F ſeu diſtantiae ſegmenti a polo. S hic vt functio ipſius s conſiderari debet, quod ita optime ſuccedit: Eſt ſegmentum conoidale

$$\text{D C E F} = \text{X} = \tfrac{1}{3}\, r\, s, \text{ conus D C E G} = \text{Y} = \tfrac{1}{3}\, \pi\, \text{D G}^2.$$
$$\text{C G} = \tfrac{1}{3}\, \pi\, a\, (2\, r - a)\, (r - a) = \tfrac{1}{3}\, \pi\, a\, (2\, r^2 - 3\, a\, r + a^2)$$

ideoque

$$\text{S} = \text{X} - \text{Y} = \tfrac{1}{3}\, (r\, s - 2\, \pi\, a\, r^2 + 3\, \pi\, a^2\, r - \pi\, a^3).$$

Eſt

Est autem $s = 2\pi a r$, vnde fit

$$S = a(\pi a r - \tfrac{1}{3}\pi a^2) = a(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{3}\pi a^2).$$

Habemus itaque $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2}s - \pi a^2$, quod positum $= 0$ dat, $a^2 = \frac{s}{2\pi} = a r$, seu 1.) $a = r$, et 2.) $a = 0$. Prior valor $a = r$ dat $\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = -2\pi r$: ergo S fit Maximum, si D C F $= 90°$ seu segmentum D F E hemisphaerium. Alter valor $a = 0$ neque Maximum neque Minimum dat, quia hocce casu

$$\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = -2\pi a = 0, \text{ at } \frac{\partial^3 S}{\partial a^3} = -2\pi,$$

non euanescit. Ceterum patet, eodem casu fieri $S = \frac{1}{2}a s = 0$.

Si area circuli D E seu baseos segmenti D F E statuatur constans, quaeraturque, quonam casu superficies segmenti fiat Maximum vel Minimum, ponatur area baseos $= s$, segmenti $= S$. Eritque $s = \pi\,DG^2 = 2\pi a r - \pi a^2$ et $S = 2\pi a r = s + \pi a^2$, vnde $\frac{\partial S}{\partial a} = +2\pi a$, quod ostendit, casu $a = 0$ aream S fieri Minimum. Illo enim casu est $s = 2\pi a r = S$, ob $r = \infty$; aliis vero omnibus casibus maior est $S = s + \pi a^2$. Fit quoque $\frac{\partial\partial S}{\partial a^2} = +2\pi$. Hic itaque casus $a = r$ non praebet Maximum, quod quoque rei natura docet. Quia enim s ceu functio ipsius a considerata hocce casu Maximum est, erit $\partial s = 0$, vel s infinite parum decrescit crescente a, vnde non opus est vt r augeatur, licet a nonnihil crescat. Eodem vero casu S, quae constat ex parte constante s et variabili πa^2, admodum crescere debet, vnde non potest esse Maximum. At eandem ob causam patet, neque fieri posse Minimum, quia S sensibiliter decrescit, decrescente a et r non mutato.

§. 6. Sit nunc (Fig. 8.) A C B Conus rectus, cuius altitudo $CD = a$, radius baseos $AD = r$, ac primum statuatur area circuli A B constans, qua posita $= s$, erit $s = \pi r r$ Tab. II. Fig. 8.

 adeo-

adeoque r constans. Si nunc Maxima et Minima pro superficie conica ACB $= S$ quaerantur, erit

$$S = \pi r AC = \pi r \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

atque hic per se patet, ob r constantem, S cum a in infinitum crescere seu eo fieri maiorem, quo minor angulus ACD: ergo S fieri nequit Maximum. Non minus euidens est, S cum a decrescere sed non in infinitum. Si nempe $a = 0$, fit $S = \pi r^2$; quodsi autem a vlterius decrescat abeatque in partem negatiuam (vnde oritur Conus nostro in vertice oppositus), S rursus crescit. Ergo casu $a = 0$, S fit Minimum. Idem differentiando elicitur. Est nempe $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\pi r a}{\sqrt{(a^2 + r^2)}}$, quod euanescit posito $a = 0$. Eodem autem casu fit

$$\frac{\partial \partial S}{\partial a^2} = \frac{\pi r}{\sqrt{(a^2 + r^2)}} - \frac{\pi r a^2}{\sqrt{(a^2 + r^2)^3}} = \pi, \text{ positiuum.}$$

Contemplemur iam ipsum Conum ACB, quo posito $= S$, sumatur superficies conica ACB $= s$ constans, vt sit $s = \pi r \sqrt{(a^2 + r^2)}$, $S = \frac{1}{3} \pi a r^2$. Quoniam aequatio inter binas variabiles a et r quaeritur, S foret exprimenda per s, quod ob a et r signo radicali in aequatione pro s affectas difficultate non careret. Verum incommodum hoc euitari potest, eliminando differentiale quantitatis a ope aequationis: $\partial s = 0$, ob s constantem. Hinc erit

$$\frac{\partial s}{\pi} = 0 = \partial r \sqrt{(r^2 + a^2)} + \frac{r^2 \partial r}{\sqrt{(r^2 + a^2)}} + \frac{a r \partial a}{\sqrt{(r^2 + a^2)}},$$

seu $\partial r (2 r^2 + a^2) + a r \partial a = 0$, vnde nascitur $\partial a = -\frac{(2 r^2 + a^2) \partial r}{a r}$. Est porro $\partial S = \frac{1}{3} \pi (2 a r \partial r + r^2 \partial a)$, quod positum $= 0$, introducto simul valore ipsius ∂a modo inuento, praebet:

$$2 a r \partial r - \frac{r (2 r^2 + a^2) \partial r}{a} = 0, \text{ seu } a^2 r = 2 r^3;$$

quae aequatio tres habet radices: 1.) $r = 0$, 2.) $a = + r \sqrt{2}$, 3.) $a = - r \sqrt{2}$. Qui valores quo penitius inspiciantur,

con-

consideretur

$$\frac{3\partial\partial s}{\pi\partial r} = 2a\partial r + 2r\partial a - \frac{6r^2\partial r}{a} + \frac{2r^3\partial a}{a^2} - a\partial r - r\partial a$$

$$= a\partial r - \frac{(2r^2+a^2)\partial r}{a} - \frac{6r^2\partial r}{a} - \frac{2r^2(2r^2+a^2)\partial r}{a^3}, \text{ h. e.}$$

$$\frac{3\partial\partial s}{\pi\partial r^2} = \frac{a^4 - 2a^2r^2 - a^4 - 6a^2r^2 - 4r^4 - 2a^2r^2}{a^3} = -\frac{2r^2(5a^2+2r^2)}{a^3}.$$

Iam vero casu 1.) fit $s = \pi r a$, adeoque $a = \infty$, et $\frac{\partial\partial s}{\partial r^2} = 0$, habens factorem $\frac{r^2}{a} = r^3$, seu tres factores aequales euanescentes, vnde et $\partial^3 S$ et $\partial^4 S$, non autem $\partial^5 S$ factorem habebit r euanescentem. Quapropter radix $r = 0$ neque Maximum dat neque Minimum. Casu 2.) et 3.) fit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial r^2} = -\frac{\pi a^2(6a^2)}{3a^3} = -2\pi a = \mp 2\pi r\sqrt{2};$$

vnde concluditur, ambo radices dare Maximum, quia posito a negatiuo, $S = \frac{1}{3}\pi a r^2$ etiam valorem induit negatiuum, ideoque signum positiuum, quo $\partial\partial S$ affectum est, hic speciem Minimi mentiens, reuera ostendit, S esse Maximum negatiuum: quod per se patet, siquidem Cono opposito respondet.

S itaque Maximum fit, si $\frac{a}{r} = \sqrt{2}$, h. e. tang. CAD $=$ 1,4142136. Omnium itaque Conorum rectorum, qui aequalem habent superficiem, ille est maximus, cuius latus ad basin inclinatur sub angulo $54^\circ.\ 44'$ ....., h. e. sub quo alae molarum alatarum ad axem inclinatae esse debent, vt ventus in eas adhuc quiescentes maximam vim exerat.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE VIRIBVS CENTRIPETIS, AD CVRVAS NON IN EODEM PLANO SITAS DESCRIBENDAS, REQVISITIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Notissimum est problema & a summo *Nevtono* egregie solutum, quo vis centripeta ad datum punctum fixum tendens quaeritur, a qua si corpus sollicitetur, per datam lineam curuam promoueatur. Euidens autem est in enunciatione huius problematis tacite assumi, tam totam curuam a corpore describendam in eodem plano sitam esse debere, quam ipsum centrum virium in eodem plano esse statuendum, quando quidem certum est, omne corpus ab vnica vi centripeta sollicitatum semper in eodem plano moveri, quod per ipsum centrum virium transeat. Hinc ergo patet, si curva a corpore describenda non fuerit in eodem plano sita, tum omnino fieri non posse vt talis motus ab vnica vi centripeta producatur, sed ad minimum duo centra virium diuersa constitui debere. Ostendam igitur hic, talia duo centra virium semper pro arbitrio accipi posse, quomodocunque curua descripta extra planum diuagetur, ac perpetuo illas binas vires centripetas ita determinari posse, vt corpus ab iis sollicitatum per curuam propositam promoueri queat.

§. 2.

§. 2. Sit igitur propoſita curua quaecunque A Z, cuius punctum quoduis Z vtcunque extra planum tabulae ſit poſitum, cuius ergo locus more ſolito per ternas coordinatas $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = x$ definiatur, inter quas igitur ob curuam datam duplex relatio detur neceſſe eſt, vnde pro quauis abſciſſa x tam valor ipſius y quam ipſius z aſſignari poſſit. Quin etiam, introducendo ipſius curuae elementum, quod ſit $= \partial s$, poni poterit $\partial x = p \partial s$, $\partial y = q \partial s$ et $\partial z = r \partial s$, ita vt ſit $pp + qq + rr = 1$, et quouis caſu valores harum litterarum vt cogniti ſpectari poterunt.

Tab. III. Fig. 1.

§. 3. Conſtituatur igitur alterum centrum virium in ipſo puncto C ac ponatur ab eo diſtantia puncti Z ſcilicet $CZ = v$, ita vt ſit $vv = xx + yy + zz$; tum vero denotet V ipſam vim centripetam qua corpus in Z verſus iſtud centrum C vrgeri debet, ex qua ergo ſecundam directiones coordinatarum reſultabunt ternae vires, quae erunt

ſecundum $XC = \frac{Vx}{v}$,

ſecundum $YX = \frac{Vy}{v}$ et

ſecundum $ZY = \frac{Vz}{v}$.

§. 4. Alterum autem centrum virium C' vbicunque in plano quidem tabulae accipiatur, pro quo ſi punctum Z pariter per ternas coordinatas prioribus parallelas referatur, vocentur eae $C'X' = x'$, $X'Y = y'$ et $YZ = z$ vt ante, quae ergo a praecedentibus tantum quantitate conſtante diſcrepabunt, ita vt ſit $x' = x + a$, et $y' = y + b$. Quod ſi vero centrum C' extra planum tabulae accipiatur, tum praeterea erit $z' = z + c$; vnde differentialia harum coordinatarum a praecedentibus non diſcrepabunt, ideoque litterae p, q, r perinde ad ambo centra virium C et C' referentur. Statuatur igitur pro hoc centro C' di-

diſtantia $C'Z = v'$ et ipſa vis centripeta huc tendens $= V'$, ita vt nunc ſit $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$; at vires pro ternis noſtris directionibus hinc oriundae erunt

ſecundum $X'C' = \frac{V'x'}{v'}$,

ſecundum $YX' = \frac{V'y'}{v'}$,

ſecundum $ZY = \frac{V'z'}{v'}$.

§. 5. Introducamus nunc elementum temporis ∂t, quo pro conſtanti aſſumto, principia motus ſequentes tres aequationes ſuppeditabunt:

I. $\frac{\partial\partial x}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'}$;

II. $\frac{\partial\partial y}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'}$;

III. $\frac{\partial\partial z}{\alpha\partial t^2} = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'}$;

vbi α denotat certam quantitatem conſtantem, ex ratione qua tam tempus t exprimitur quam ipſae vires V et V′ ad menſuras cognitas reuocantur, petendam. Cum igitur hic tres habeantur aequationes, facile intelligitur, ex iis binas vires incognitas V et V′ ſemper determinari poſſe.

§. 6. Elidamus hinc primo vim V′, id quod duplici modo fieri poterit; primo ſcilicet ex aequationum §. praecedentis prima et ſecunda fiet

$$\frac{y'\partial\partial x - x'\partial\partial y}{\alpha\partial t^2} = -\frac{V(y'x - x'y)}{v}$$

deinde ſecunda et tertia ſimili modo praebent

$$\frac{z'\partial\partial y - y'\partial\partial z}{\alpha\partial t^2} = -\frac{V(z'y - y'z)}{v}$$

quarum haec per illam diuiſa perducit ad hanc aequationem:

$$\frac{z'\partial\partial y - y'\partial\partial z}{y'\partial\partial x - x'\partial\partial y} = \frac{z'y - y'z}{y'x - x'y}$$

vnde etiam ipſum temporis elementum ∂t eſt expulſum; interim tamen conditio, qua ∂t constans est assumtum, etiamnunc inhaeret, vnde ratio differentialium secundi gradus, quae per se forent indefinita, peti debet.

§. 7. Quod si iam postrema ista aequatio euoluatur, peruenietur ad sequentem aequationem

$$y'\partial\partial x(z'y-y'z)+y'\partial\partial y(x'z-z'x)+y'\partial\partial z(y'x-x'y)=0,$$

quae commode per y' diuidi se patitur, et aequatio induet hanc formam:

$$\partial\partial x(z'y-y'z)+\partial\partial y(x'z-z'x)+\partial\partial z(y'x-x'y)=0.$$

Hic iam introducamus valores supra notatos, scilicet $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, et prodibit haec aequatio:

$$\partial\partial x\,(cy-bz)+\partial\partial y\,(az-cx)+\partial\partial z\,(bx-ay)=0,$$

quae secundum litteras a, b, c disposita euadet

$$a(z\partial\partial y-y\partial\partial z)+b(x\partial\partial z-z\partial\partial x)+c(y\partial\partial x-x\partial\partial y)=0.$$

§. 8. Hic igitur singulae partes manifesto sponte sunt integrabiles, vnde integratio dabit

$$a(z\partial y-y\partial z)+b(x\partial z-z\partial x)+c(y\partial x-x\partial y)=\text{const.}$$

quam constantem vtique formam differentialem habere oportet; quare cum elementum ∂t sumtum sit constans, aequatio ita repraesentari debet:

$$a(z\partial y-y\partial z)+b(x\partial z-z\partial x)+c(y\partial x-x\partial y)=C\partial t.$$

Ac si iam introducamus positiones $\partial x=p\partial s$, $\partial y=q\partial s$ et $\partial z=r\partial s$, haec aequatio accipiet hanc formam:

$$a\partial s\,(qz-ry)+b\partial s\,(rx-pz)+c\partial s\,(py-qx)=C\partial t,$$

atque hinc, quia elementum ∂t suppositum est constans, differentiando colligetur differentiale secundum $\partial\partial s$, cum fiat

$a\partial\partial s$

$$\left.\begin{array}{l} a\partial\partial s\,(qz-ry)+b\partial\partial s\,(rx-pz)+c\partial\partial s\,(py-qx) \\ +a\partial s\,(z\partial q-y\partial r)+b\partial s\,(x\partial r-z\partial p)+c\partial s\,(y\partial p-x\partial q) \end{array}\right\} = 0.$$

Sicque erit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{a(y\partial r-z\partial q)+b(z\partial p-x\partial r)+c(x\partial q-y\partial p)}{a(qz-ry)+b(rx-pz)+c(py-qx)}.$$

§. 9. Cum igitur formula $\frac{\partial s}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis in puncto Z, si haec celeritas vocetur $=u$, vt sit $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, iam adepti sumus formulam pro corporis celeritate u; erit enim

$$u = \frac{c}{a(qz-ry)+b(rx-pz)+c(py-qx)}.$$

Introducendo autem istam celeritatem, cum in nostris formulis principalibus sit $\frac{\partial\partial x}{\partial t} = \partial . \frac{\partial x}{\partial t}$, ob $\partial x = p\,\partial s$ et $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, erit $\frac{\partial\partial x}{\partial t} = \partial . pu = p\,\partial u + u\,\partial p$; similique modo erit

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t} = \partial . qu = q\,\partial u + u\,\partial q \text{ et}$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = \partial . ru = r\,\partial u + u\,\partial r.$$

§. 10. His inuentis ambas vires quaesitas V et V′ definire licebit; cum enim inuenerimus:

$$\frac{y'\partial\partial x - x'\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{V}{v}(y'x - x'y) = -\frac{V'}{v}(bx-ay),$$

multiplicando per $\alpha\partial t$ et loco $\frac{\partial\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial\partial y}{\partial t}$ valores ante inuentos substituendo, erit

$$y'(p\partial u + u\partial p) - x'(q\partial u + u\partial q) = -\frac{\alpha V\partial t}{v}(bx-ay),$$

ergo ob $x' = x + a$ et $y' = y + b$, erit

$$V = \frac{(x+a)(q\partial u + u\partial q) - (y+b)(p\partial u + u\partial p)}{bx-ay} \cdot \frac{v}{\alpha\,\partial t}.$$

§. 11. Simili modo cum ex aequationibus principalibus elici queat haec aequatio y'

$$\frac{y\,\partial\partial x - x\,\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{V'}{v'}(x'y - y'x) = -\frac{V'}{v'}(ay - bx),$$

factis iisdem substitutionibus perueniemus ad sequentem formam:

$$V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{x(q\,\partial u + u\,\partial q) - y(p\,\partial u + u\,\partial p)}{ay - bx}.$$

Sicque pro quouis casu oblato, non solum ambas vires centripetas V et V', sed etiam celeritatem corporis in singulis punctis curuae propositae assignare licet.

§. 12. Quoniam ternas coordinatas x, y et z inter se permutare licet, etiam pro vtraque vi centripeta V et V' ternae expressiones exhiberi poterunt, quae erunt pro vi V ad centrum C tendente

$$\text{I. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(x+a)(q\,\partial u + u\,\partial q) - (y+b)(p\,\partial u + u\,\partial p)}{bx - ay}\right),$$

$$\text{II. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(y+b)(r\,\partial u + u\,\partial r) - (z+c)(q\,\partial u + u\,\partial q)}{cy - bz}\right),$$

$$\text{III. } V = \frac{v}{\alpha\,\partial t}\left(\frac{(z+c)(p\,\partial u + u\,\partial p) - (x+a)(r\,\partial u + u\,\partial r)}{az - cx}\right),$$

Simili modo pro altera vi centripeta V' ad centrum C' tendente

$$\text{I. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{x(q\,\partial u + u\,\partial q) - y(p\,\partial u + u\,\partial p)}{ay - bx},$$

$$\text{II. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{y(r\,\partial u + u\,\partial r) - z(q\,\partial u + u\,\partial q)}{bz - cy},$$

$$\text{III. } V' = \frac{v'}{\alpha\,\partial t} \cdot \frac{z(p\,\partial u + u\,\partial p) - x(r\,\partial u + u\,\partial r)}{cx - az},$$

ALIA SOLVTIO
eiusdem quaestionis multo succinctior.

Tab. III. Fig. 2. §. 13. Quia ternas directiones fixas, quibus ternas coordinatas x, y, z parallelas statuimus, pro lubitu accipere licet, solutio multo fiet simplicior, si axem, in quo abscissas x, capimus, per ipsa bina centra virium C et C' ducamus. Sint igitur C et C' bina centra virium, et ne alteri prae altero vllam

lam praerogatiuam tribuamus, abſciſſas OX a puncto medio O computemus, quem in finem ponamus $OC = OC' = k$, vt pro centro C ſit abſciſſa $CX = x + k$, pro altero vero centro $C'X = x - k$, quia in partem contrariam vergit, binae autem reliquae coordinatae XY et YZ aeque referuntur. Hinc ductis diſtantiis CZ et C'Z, erit

$$CZ = v = \sqrt{(x+k)^2 + yy + zz} \text{ et}$$
$$C'Z = v' = \sqrt{(x-k)^2 + yy + zz},$$

ita vt ſit $vv + v'v' = 4kx$.

§. 14. Quod ſi nunc vt ante vis ad centrum C tendens vocetur $= V$, altera vero vis ad centrum C' tendens $= V'$, ſumto elemento temporis ∂t conſtante tres aequationes motum determinantes erunt:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{V(x+k)}{v} - \frac{V'(x-k)}{v'};$$
$$\text{II. } \frac{\partial\partial y}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y}{v'};$$
$$\text{III. } \frac{\partial\partial z}{\alpha\,\partial t^2} = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z}{v'};$$

vbi ſtatim commode vſu venit, vt ſecunda per tertiam diuiſa praebeat hanc ſimplicem aequalitatem $\frac{\partial\partial y}{\partial\partial z} = \frac{y}{z}$, ideoque $z\partial\partial y - y\partial\partial z = 0$, hinc igitur integrando fiet $z\partial y - y\partial z = C\partial t = \frac{c\,\partial s}{u}$, poſito ſcilicet elemento curuae deſcriptae $= \partial s$ et celeritate $= u$.

§. 15. Ponamus nunc vt ante $\partial x = p\partial s$, $\partial y = q\partial s$ et $\partial z = r\partial s$, ita vt ſit $pp + qq + rr = 1$, eritque $C\partial t = \partial s(qz - ry)$, ideoque $u = \frac{c}{qz - ry}$. Porro vero ob ſumtum ∂t conſtans fiet $\partial\partial s = \frac{\partial s(y\partial r - z\partial q)}{qz - ry}$, vel etiam per celeritatem habebimus $\partial\partial s = \frac{\partial u\,\partial s}{u}$, vnde erit

$$\partial\partial x = \frac{\partial s(p\,\partial u + u\,\partial p)}{u},$$

$$\partial\partial y = \frac{\partial s(q\,\partial u + u\,\partial q)}{u} \text{ et}$$

$$\partial\partial z = \frac{\partial s(r\,\partial u + u\,\partial r)}{u},$$

vnde porro colligitur: $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{u(r\,\partial u + u\,\partial r)}{\partial s}$, $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = \frac{u(q\,\partial u + u\,\partial q)}{\partial s}$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{u(r\,\partial u + u\,\partial r)}{\partial s}$, quae ternae expreſſiones breuitatis gratia per litteras P, Q et R indicentur, vbi notaſſe iuuabit fore $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z}$, ob $u = \frac{C}{qz - ry}$.

§. 16. Nunc pro ipſis viribus centripetis inueniendis combinemus primam aequationem cum ſecunda, ac primo

I. y — II. $(x - k)$ praebet

$$\frac{P.\,y - Q(x - k)}{\alpha} = -\frac{2Vky}{v}, \text{ ideoque}$$

$$\text{vis } V = \frac{vQ(x - k) - vPy}{2\alpha ky}.$$

Simili modo combinatio I. y — II. $(x + k)$ praebet

$$\frac{yP - Q(x + k)}{\alpha} = \frac{2V'ky}{v'} \text{ ideoque vis}$$

$$V' = \frac{v'Py - vQ(x + k)}{2\alpha ky},$$

quas ambas formulas etiam ita repraeſentare licet

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{Qx - Py}{ky} - \frac{Q}{y} \text{ et } \frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{Py - Qx}{ky} - \frac{Q}{y}.$$

Ad illuſtrationem huius ſolutionis quaedam exempla ſubiungamus.

Problema I.

§. 17. *Si corpus vtcunque in ſuperficie cylindri moueri debeat, in cuius axe ambo centra virium C et C′ accipiantur inuenire tam celeritatem corporis* u *quam ambas vires centripetas V et V′.*

Solutio.

Solutio.

Sit radius cylindri $= a$ et diſtantia centrorum $CC = 2k$, eritque $yy + zz = aa$; ponatur ergo

$$y = a \operatorname{cof.} \Phi \text{ et } z = a \operatorname{fin.} \Phi,$$

tum vero, quia motum quemcunque in ſuperficie cylindri ſtatuimus, abſciſſa x tanquam certa functio anguli Φ ſpectari poterit, vnde fiat $\partial x = \Pi \partial \Phi$; inde autem colligentur diſtantiae corporis a centris virium

$$v = \sqrt{(x+k)^2 + aa} \text{ et } v' = \sqrt{(x-k)^2 + aa};$$

deinde vero ob $\partial y = - a \partial \Phi \operatorname{fin.} \Phi$ et $\partial z = a \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi$, erit $\partial s = \partial \Phi \sqrt{(\Pi\Pi + aa)}$, ex quo porro fiet $p = \frac{\pi}{\sqrt{(\Pi\Pi + aa)}}$, $q = \frac{a \operatorname{fin.} \Phi}{\sqrt{(\Pi\Pi + aa)}}$ et $r = \frac{a \operatorname{cof.} \Phi}{\sqrt{(\Pi\Pi + aa)}}$.

His poſitis celeritas corporis in Z reperietur

$$u = \frac{c\sqrt{(\Pi\Pi + aa)}}{aa}.$$

Deinde pro ipſis viribus inueniendis quaerantur ante omnia valores litterarum P, Q, R; reperieturque

$$P = \frac{cc \partial \Pi}{a^4 \partial \Phi} = \frac{cc}{a^4} \Pi',$$

poſito $\partial \Pi = \Pi' \partial \Phi$ Porro erit $Q = - \frac{cc \operatorname{cof.} \Phi}{a^3}$, ac denique $R = - \frac{cc \operatorname{fin.} \Phi}{a^3}$, vnde vtique habetur $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z} = \frac{\operatorname{cof.} \Phi}{\operatorname{fin.} \Phi}$.

His valoribus inuentis pro ipſis viribus quaeramus primo formulam:

$$\frac{Qx - Py}{y} = - \frac{cc}{a^4}(x + \Pi'),$$

ac tum ob $\frac{Q}{y} = - \frac{cc}{a^4}$ habebimus:

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{cc}{a^4} - \frac{cc}{a^4} \cdot \frac{(x + \Pi')}{k} = \frac{cc}{a^4}\left(1 - \frac{x - \Pi'}{k}\right),$$

$$\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{cc}{a^4} + \frac{cc}{a^4} \cdot \frac{(x - \Pi')}{k} = \frac{cc}{a^4}\left(1 + \frac{x + \Pi'}{k}\right),$$

vnde

vnde ipſae vires erunt

$$V = \frac{ccv}{2\alpha a^4}\left(1 - \frac{x - \Pi}{k}\right) \text{ et } V' = \frac{ccv'}{2\alpha a^4}\left(1 + \frac{x + \Pi}{k}\right).$$

Corollarium 1.

§. 18. Quod ſi velimus vt corpus in ſuperficie cylindri deſcribat helicem Archimedis, ſeu eam lineam, quae intra ſuos terminos eſt breuiſſima, poni debet $x = n a \Phi$, ideoque $\Pi = n a$ et $\Pi' = 0$, vnde ſequitur celeritas corporis $u = \frac{c\sqrt{(1 + nn)}}{a}$, quae ergo perpetuo manebit conſtans, vnde ſi vocetur $u = c$, erit $C = \frac{ac}{\sqrt{(1 + nn)}}$, tum vero ambae vires centripetae ita erunt comparatae

$$V = \frac{ccv}{2\alpha a^4}\left(1 - \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right) \text{ et } V' = \frac{ccv'}{2\alpha a^4}\left(1 + \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right),$$

quare ſi loco C ſcribamus valorem modo aſſignatum, erit

$$V = \frac{ccv}{2\alpha aa(1 + nn)}\left(1 - \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right) \text{ et}$$

$$V' = \frac{ccv'}{2\alpha aa(1 + nn)}\left(1 + \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right).$$

Corollarium 2.

§. 19. Quod ſi factorem conſtantem $\frac{cc}{2\alpha aa(1 + nn)}$ deſignemus litera, A habemus

$$V = Av\left(1 - \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right) \text{ et } V' = Av'\left(1 + \frac{na(1 + \Phi)}{k}\right),$$

vnde patet vtramque vim centripetam conſtare duabus partibus, quarum prior ſimpliciter proportionalis eſt diſtantiae corporis a centro, poſterior vero eidem diſtantiae per angulum Φ multiplicatae, quandoquidem erit

$$V = A\left(1 - \frac{na}{k}\right)v - \frac{Ana\Phi v}{k} \text{ et}$$

$$V' = A\left(1 + \frac{na}{k}\right)v' + \frac{Ana\Phi v'}{k},$$

vbi poſterior vis V′ maior eſt priore, propterea quod corpus a cena centro C recedere, contra vero ad centrum C′ accedere assumsimus.

Problema II.

§. 20. *Si corpus vtcunque in superficie globi moueri debeat, et ambo centra virium in ipsis polis huius globi statuantur, inuenire tam celeritatem corporis* u, *quam ambas vires centripetas V et V′.*

Solutio.

Sint igitur C et C′ poli nostrae Sphaerae, cuius radius ponatur $= a$, eritque O eius centrum et $k = a$. Cum igitur esse debeat $xx + yy + zz = aa$, statuamus $x = a \sin. \eta$, tum vero $y = a \cos. \eta \cos. \Phi$, et $z = a \cos. \eta \sin. \Phi$, vbi in genere ambo anguli η et Φ relationem quamcunque inter se tenere possunt, ex quo statuamus $\partial \Phi = \Pi \partial \eta$ et $\partial \Pi = \Pi' \partial \eta$. Primo igitur distantiae corporis ab vtroque polo erunt

$$v = a \surd (2 + 2 \sin. \eta) = 2 a \cos. (45^\circ - \tfrac{1}{2} \eta) \text{ et}$$
$$v' = a \surd (2 - 2 \sin. \eta) = 2 a \sin. (45^\circ - \tfrac{1}{2} \eta).$$

Cum nunc sit $\partial s = \surd (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$, ob

$$\partial x = a \partial \eta \cos. \eta$$
$$\partial y = - a \partial \eta (\sin. \eta \cos. \Phi + \Pi \cos. \eta \sin. \Phi) \text{ et}$$
$$\partial z = a \partial \eta (\Pi \cos. \eta \cos. \Phi - \sin. \eta \sin. \Phi),$$

habebitur

$$\partial s = a \partial \eta \surd (1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2).$$

Hinc iam porro deducimus

$$p = \frac{\cos. \eta}{\surd (1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)},$$
$$q = - \frac{(\sin. \eta \cos. \Phi + \Pi \cos. \eta \sin. \Phi)}{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)} \text{ et}$$
$$r = \frac{\Pi \cos. \eta \cos. \Phi - \sin. \eta \sin. \Phi}{\surd (1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)},$$

quamobrem hinc celeritas corporis ita definietur, vt fit

$$u = \frac{C\sqrt{(1 + \Pi\Pi \, cof.\, \eta^2)}}{a\,\Pi\, cof.\, \eta^2},$$

vnde patet, dum corpus ad alterutrum polum pertingit, quod fit quando angulus η fit rectus, celeritatem corporis ibi fieri infinitam, nifi forte quantitas Π euadat infinita, ita vt $\Pi\, cof.\, \eta^2$ euadat quantitas finita puta A, interim tamen etiam hoc cafu, quoniam fit $u = \frac{C\sqrt{(1 + \frac{AA}{cof.\, \eta^2})}}{a A}$, manifefto celeritas fit infinita.

Nunc vt etiam valores litterarum P, Q, R eruamus, pro P habemus primo $p\,u = \frac{C}{a\,\Pi\, cof.\, \eta}$, hincque

$$\partial.\, p\,u = \frac{C\,\partial\eta}{a}\; \frac{(\Pi\, fin.\, \eta - \Pi'\, cof.\, \eta)}{\Pi\,\Pi\, cof.\, \eta^2}, \text{ vnde ob}$$

$$\frac{u}{\partial s} = \frac{C}{a\,a\,\Pi\,\partial\eta\, cof.\, \eta^2} \text{ reperietur}$$

$$P = \frac{CC}{a^3}\; \frac{(\Pi\, fin.\, \eta - \Pi'\, cof.\, \eta)}{\Pi^3\, cof.\, \eta^4}.$$

Deinde ob

$$q\,u = -\frac{C\,(fin.\, \eta\, cof.\, \Phi + \Pi\, cof.\, \eta\, fin.\, \Phi)}{a\,\Pi\, cof.\, \eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial.\, q\,u = -\frac{C\,\partial\eta\, cof.\, \Phi}{a}\; \frac{(\Pi\,(1 + \Pi\Pi)\, cof.\, \eta^2 + 2\,\Pi\, fin.\, \eta^2 - \Pi'\, fin.\, \eta\, cof.\, \Phi)}{\Pi\,\Pi\, cof.\, \eta^3},$$

quae expreffio ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$Q = -\frac{CC\, cof.\, \Phi}{a^3}\; \frac{(\Pi\,(1 + \Pi\Pi)\, cof.\, \eta^2 + 2\,\Pi\, fin.\, \eta^2 - \Pi'\, fin.\, \eta\, cof.\, \eta)}{\Pi^3\, cof.\, \eta^5}.$$

Denique cum fit

$$r\,u = -\frac{C}{u}\; \frac{(fin.\, \eta\, fin.\, \Phi - \Pi\, cof.\, \eta\, cof.\, \Phi)}{\Pi\, cof.\, \eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial.\, r\,u = -\frac{C\,\partial\eta\, fin.\, \Phi}{a}\; \frac{(\Pi\,(1 + \Pi\Pi)\, cof.\, \eta^2 + 2\,\Pi\, fin.\, \eta^2 - \Pi'\, fin.\, \eta\, cof.\, \eta)}{\Pi\,\Pi\, cof.\, \eta^3},$$

quae formula ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$R = -\frac{CC\, fin.\, \Phi}{a^3}\; \frac{(\Pi\,(1 + \Pi\Pi)\, cof.\, \eta^2 + 2\,\Pi\, fin.\, \eta^2 - \Pi'\, fin.\, \eta\, cof.\, \eta}{\Pi^3\, cof.\, \eta^5},$$

vnde manifeftum eft effe $Q : R = y : z$ hoc eft $= cof.\, \Phi : fin.\, \Phi$.

Cum

Cum nunc ob $k = a$ ſit

$$\frac{2\alpha V}{v'} = \frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} - \frac{Q}{y} \text{ et } \frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{P}{a} - \frac{Qx}{ay} - \frac{Q}{y}, \text{ erit}$$

$$\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^4}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi\sin.\eta^2 - \Pi'\sin.\eta\cos.\eta)}{\Pi^3\cos.\eta^6} \text{ et}$$

$$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = -\frac{cc}{a^4}\,\frac{(\Pi(1+\Pi\Pi)\sin.\eta\cos.\eta^2 + 2\Pi\sin.\eta^3 - \Pi'\sin.\eta^2\cos.\eta + \Pi\sin.\eta\cos.\eta^2 - \Pi'\cos.\eta^3)}{\Pi^3\cos.\eta^6},$$

quae expreſſiones etiam ita repraeſentari poſſunt

$$\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^4\Pi^4\cos.\eta^6}\left(\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \sin.\eta\,\frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}\right) \text{ et}$$

$$\frac{P}{a} = \frac{-cc}{a^4\Pi^3\cos.\eta^4}\,\frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta} \text{ et hinc}$$

$$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = \frac{-cc}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6}\left(\Pi\sin.\eta(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}\right).$$

His autem valoribus ſubſtitutis fiet

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{cc(1-\sin.\eta)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6}\left(\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) + \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}\right) \text{ et}$$

$$\frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{cc(1+\sin.\eta)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6}\left(\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}\right),$$

quibus formulis ergo ambae vires centripetae V et V' ſatis commode exprimuntur, vbi meminiſſe iuuabit eſſe

$$v = a\sqrt{2(1+\sin.\eta)} \text{ et } v' = a\sqrt{2(1-\sin.\eta)}.$$

EVOLVTIO CASVS

quo corpus in ſuperficie Sphaerica Loxodromiam deſcribit.

§. 21. Angulus ergo, ſub quo via corporis ſingulos meridianos interſecat, debet eſſe conſtans, cuius tangens ſi ponatur $= n$, reperietur $\frac{\partial\Phi\cos.\eta}{\partial\eta} = n$, vnde ergo fit $\partial\Phi = \frac{n\,\partial\eta}{\cos.\eta}$, ſicque habebitur $\Pi = \frac{n}{\cos.\eta}$, ac propterea formula $\Pi\cos.\eta = n$ erit conſtans eiusque differentiale euaneſcet. Hic ergo erit vt ante $v = a\sqrt{2(1+\sin.\eta)}$ et $v' = a\sqrt{2(1-\sin.\eta)}$; tum vero prodibit celeritas $u = \frac{c\sqrt{(1+nn)}}{a\,n\cos.\eta}$, quae ergo in ipſis polis vbi $\eta = 90°$ fiet infinita. Deinde autem ambae vires centripetae

tripetae ita erunt comparata vt ſit

$$\frac{2\alpha V}{v} = \frac{CC(1-\sin.\eta)(1+nn)}{nn\,a^4\cos.\eta^4} \text{ et } \frac{2\alpha V'}{v'} = \frac{CC(1+\sin.\eta)(1+nn)}{nn\,a^4\cos.\eta^4},$$

vnde loco v et v' valoribus ſubſtitutis colligetur

$$V = \frac{(1+nn)CC(1-\sin.\eta)\sqrt{2(1+\sin.\eta)}}{2\alpha nn\,a^3\cos.\eta^4} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1+nn)CC(1+\sin.\eta)\sqrt{2(1-\sin.\eta)}}{2\alpha nn\,a^3\cos.\eta^4}.$$

Cum nunc ſit $\cos.\eta^2 = (1+\sin.\eta)(1-\sin.\eta)$, hae formulae reducentur ad ſequentes

$$V = \frac{(1+nn)CC\sqrt{2}}{2\alpha nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{(1+\sin.\eta)}} = \frac{(1+nn)CC}{\alpha nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1+\sin.\eta)}} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1+nn)CC}{\alpha nn\,a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1-\sin.\eta)}},$$

vnde patet fore $V : V' = v' : v$ ita vt ſit $V'v' = Vv$.

§. 22. Quod ſi fuerit $n = 0$, quo caſu corpus movebitur in ipſo meridiano, erit primo celeritas $u = \infty$; quia autem C eſt conſtans arbitraria, ſi ponamus $C = nA$, fiet $u = \frac{A}{a\cos.\eta}$; ipſae autem vires erunt

$$V = \frac{AA}{\alpha a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1+\sin.\eta)}} \text{ et } V' = \frac{AA}{\alpha a^3\cos.\eta^2\sqrt{2(1-\sin.\eta)}},$$

vbi notetur, dum corpus per aequatorem tranſit vbi $\eta = 0$, tum fore $u = \frac{A}{a}$, atque vires $V = \frac{AA}{\alpha a^3\sqrt{2}}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha a^3\sqrt{2}}$, ſicque hae vires erunt aequales, quo longius autem corpus ab aequatore recedit, tam celeritas quam ambae vires continuo fiunt maiores. Ponamus corpus iam tam prope ad polum acceſſiſſe, vt ſit $\eta = 90° - \omega$, exiſtente ω quaſi infinite paruo; eritque $\cos.\eta^2 = \omega\omega$, at $1+\sin.\eta = 2$, et $1-\sin.\eta = \frac{1}{2}\omega\omega$; tum ergo erit $u = \frac{A}{a\omega}$, $V = \frac{AA}{2\alpha a^3\omega\omega}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha a^3\omega^3}$.

§. 23. Sumamus nunc angulum Loxodromiae eſſe rectum, quo corpus vel in aequatore vel in quouis circulo aequatori parallelo movetur, cuius diſtantia ab aequatore angulo η indi-

indicatur; tum igitur erit $n = \infty$, hincque celeritas $u = \frac{c}{\alpha \cos \eta}$, quae ergo erit constans ob angulum η constantem; tum vero vires erunt

$$V = \frac{cc}{\alpha a^3 \cos.\eta^2 \sqrt{2(1 + \sin.\eta)}} \text{ et } V' = \frac{cc}{\alpha a^3 \cos.\eta^2 \sqrt{2(1 - \sin.\eta)}},$$

quae ergo etiam ambae erunt constantes.

§. 24. Videamus vero etiam, quomodo in genere vires futurae sint comparatae, quando corpus iam proxime ad polum accesserit ita vt sit $\eta = 90° - \omega$; tum autem erit celeritas $u = \frac{c\sqrt{(1+nn)}}{n a \omega}$, atque vires

$$V = \frac{(1+nn)cc}{\alpha n n a^3 \omega\omega} \text{ et } V' = \frac{(1+nn)cc}{\alpha n n a^3 \omega^3};$$

vnde patet, vim V infinities esse minorem quam alteram V′, ita vt corpus a sola vi V′ vrgeri censeri queat, et quia hic ω exprimet distantiam corporis a polo C′, vis ista reciproce erit cubo huius distantiae proportionalis, corpus autem iam circa polum C′ spiralem logarithmicam describet, quae vtique talem vim centripetam postulat.

§. 25. Superfluum foret plures casus euoluere, quandoquidem inde nullae expressiones elegantes et attentione dignae forent exspectandae; imprimis enim mihi erat propositum ostendere, si corpus in quacunque curua non in eodem plano sita moueri debeat, semper duas vires centripetas assignari posse, quae adeo ad data duo centra virium diriguntur, ita vt corpus ab istis viribus sollicitatum per ipsam curuam propositam promoueatur.

DE MOTV TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM SVPER EADEM LINEA RECTA.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 12 Decemb. 1776.

§. 1.

Hoc argumentum continet fine dubio cafum fimpliciffimum celeberrimi illius problematis, quo motus trium corporum fe inuicem attrahentium inueftigandus proponitur. Quamobrem fi praefens quaeftio, qua tria illa corpora fuper eadem linea recta moueri fumuntur, omnem fagacitatem Geometrarum eludit, atque adeo vires analyfeos fuperare videtur, nullo certe modo problematis illius generalis folutio fperari poterit. Hanc ob rem haud inutile erit, iftum cafum fimpliciffimum accuratius euoluere, atque omnes difficultates, quae eius folutionem impediunt, omni adhibita attentione perpendere, quo clarius appareat, quanta adhuc analyfeos incrementa defiderentur, antequam problematis generalis folutio cum fucceffu fufcipi queat.

§. 2. Sit igitur O V linea recta, fuper qua tria corpora A B C fe inuicem attrahentia moueantur, quorum maffas per

per easdem litteras A, B, C indicemus. Iam in illa recta accipiatur pro lubitu punctum fixum O, a quo ad quoduis tempus distantias illorum corporum inuestigari oporteat. Elapso igitur tempore quocunque $= t$, vocentur istae distantiae $OA = x$, $OB = y$, et $OC = z$, vbi quidem assumimus esse $y > x$ et $z > y$, sicque binorum corporum A et B distantia erit $AB = y - x$, distantia vera $AC = z - x$, et distantia $BC = z - y$, quarum distantiarum quadratis vires, quibus bina horum corporum se mutuo attrahunt, reciproce proportionales statuuntur. Hinc ergo corpus A a corpore B trahitur vi $= \frac{B}{(y-x)^2}$ atque a C vi $= \frac{C}{(z-x)^2}$. Deinde vero corpus B ad A trahitur vi $= \frac{A}{(y-x)^2}$ et ad C vi $= \frac{C}{(z-y)^2}$. Denique corpus C trahitur ad A vi $= \frac{A}{(z-x)^2}$ et ad B vi $= \frac{B}{(z-y)^2}$. Tab. III. Fig. 3.

§. 3. Ex his igitur viribus secundum principia motus orientur tres sequentes aequationes:

I. Pro motu corporis A

$$\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = + \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2}.$$

II. Pro motu corporis B

$$\frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = - \frac{A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}.$$

III. Pro motu corporis C

$$\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} = - \frac{A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2};$$

atque in his tribus aequationibus omnia continentur, quibus motus horum trium corporum determinatur. Vbi imprimis notari oportet, has formulas tam diu tantum valere, quam diu fuerit $y > x$ et $z > y$, veluti figura ostendit. At vero si nunc fuerit $y > x$, in motus continuatione interuallum $AB = y - x$ eousque tantum imminui potest, quoad corpora A et B ad contactum

tactum perueniant: ſtatim vero atque hoc contigerit, colliſio fiet, qua totus motus aliam indolem accipiet, prouti corpora fuerint elaſtica nec ne, qui effectus neutiquam in noſtris formulis continetur; vnde euidens eſt, motum in his formulis contentum diutius durare non poſſe, quam donec duo horum corporum ad contactum peruenerint.

§. 4. Statim autem patet, ob ternas diſtantias variabiles x, y & z, quibuscum etiam variabilitas temporis coniungi debet, nullam harum trium aequationum per ſe integrationem admittere poſſe. Per certas autem combinationes aequationes inde integrabiles deriuari poſſunt, quarum praecipua eſt haec: I. A + II. B + III. C, quae praebet hanc aequationem:

$$\frac{A\,\partial\partial x + B\,\partial\partial y + C\,\partial\partial z}{\partial t^2} = 0$$

quae ducta in ∂t et integrata praebet

$$A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z = \alpha\,\partial t$$

hincque denuo integrando

$$A\,x + B\,y + C\,z = \alpha\,t + \beta,$$

vbi litterae α et β denotant conſtantes per geminam integrationem ingreſſas.

§. 5. Haec autem aequatio oſtendit, commune centrum grauitatis trium corporum noſtrorum motu vniformi ſuper recta O V proferri. Quod ſi enim hoc tempore commune centrum grauitatis corporum A, B et C ſtatuatur in puncto G, eiusque diſtantia ab O vocetur $OG = v$, ex natura centri grauitatis notum eſt fore

$$A.\,x + B.\,y + C.\,z = (A + B + C)\,v.$$

Hinc igitur erit

$$(A + B + C)\,v = \alpha\,t + \beta;$$

vnde

vnde cum celeritas progreſſiua iſtius centri grauitatis ſit $= \frac{\partial v}{\partial t}$, erit iſta celeritas $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha}{A + B + C}$, ideoque conſtans. Vnde manifeſtum eſt, quomodocunque tria corpora inter ſe moueantur, eorum comune centrum grauitatis G perpetuo motu vniformi proferri, niſi forte eueniat, vt prorſus quieſcat, quod fiet, ſi fuerit $\alpha = 0$.

§. 6. Deinde etiam alia aequatio integrabilis ex tribus inuentis formari poteſt, ope huius combinationis:

$$\text{I. } A\,\partial x + \text{II. } B\,\partial y + \text{III. } C\,\partial z,$$

quando quidem hinc ſequens aequatio naſcetur:

$$\frac{A\,\partial x\,\partial\partial x + B\,\partial y\,\partial\partial y + C\,\partial z\,\partial\partial z}{\partial t^2} =$$
$$\frac{AB(\partial x - \partial y)}{(y-x)^2} + \frac{AC(\partial x - \partial z)}{(z-x)^2} + \frac{BC(\partial y - \partial z)}{(z-y)^2}$$

cuius integrale manifeſto colligitur eſſe

$$\frac{A\,\partial x^2 + B\,\partial y^2 + C\,\partial z^2}{2\,\partial t^2} = \frac{AB}{y-x} + \frac{AC}{z-x} + \frac{BC}{z-y} + \Delta.$$

§. 7. Haec aequatio continet principium foecundiſſimum virium viuarum, vel etiam minimae actionis. Cum enim $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis A, $\frac{\partial y}{\partial t}$ celeritatem corporis B, et $\frac{\partial z}{\partial t}$ celeritatem corporis C, quibus corpora a puncto fixo O recedunt, vires viuae horum corporum erunt: primi $A = \frac{A\,\partial x^2}{\partial t^2}$, ſecundi $B = \frac{B\,\partial y^2}{\partial t^2}$ et tertii $C = \frac{C\,\partial z^2}{\partial t^2}$; inde aequatio modo inventa nobis declarat, ſummam virium viuarum ſemper aequari huic formulae:

$$\frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y} + \Delta;$$

quae ergo quantitas eatenus increſcit, quatenus diſtantiae binorum corporum fiunt minores; dum contra, ſi corpora a ſe invicem recedant, ſumma virium viuarum diminuitur.

§. 8. Duas igitur iam nacti sumus aequationes integratas, quarum prior adeo duplicem integrationem admisit: vnde si quis insuper vnicam aequationem integratam eruere posset, is certe plurimum praestitisse esset censendus, quanquam tractatio harum aequationum differentialium primi gradus adhuc maximis difficultatibus foret inuoluta, ita vt etiam tum vix vlla solutio idonea expectari posset. Quantumuis autem Geometrae in hac inuestigatione elaborauerint, nulla tamen etiamnunc aequatio integrabilis deduci potuit. Interim tamen sequenti modo aequationem maxime memorabilem deducere licet, vnde haud parum lucis expectari poterit.

§. 9. Euoluamus scilicet hanc combinationem: I. $Ax +$ II. $By +$ III. Cz, quae dabit hanc aequationem:

$$\frac{Ax\partial\partial x + By\partial\partial y + Cz\partial\partial z}{\partial t^2} = -\frac{AB}{y-x} - \frac{AC}{z-x} - \frac{BC}{z-y}.$$

Ante autem per integrationem inuenimus

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y} + \Delta,$$

vnde si has duas aequationes inuicem addamus, ob

$$x\partial\partial x + \partial x^2 = \partial.\, x\partial x = \tfrac{1}{2}.\, \partial\partial.\, xx,$$

similique modo ob

$$y\partial\partial y + \partial y^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial.\, yy \text{ et}$$
$$z\partial\partial z + \partial z^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial.\, zz,$$

nascetur sequens aequatio maxime memorabilis:

$$\frac{A.\,\partial\partial.\,xx + B.\,\partial\partial.\,yy + C.\,\partial\partial.\,zz}{2\partial t^2} = \frac{AB}{y-x} + \frac{AC}{z-x} + \frac{BC}{z-y} + \Delta.$$

Neque tamen etiamnunc patet, qualis fructus hinc percipi queat, quoniam integrale membri dextri, si per ∂t multiplicetur, nullo modo sperari potest.

§. 10. Quoniam autem iam inuenimus centrum grauitatis commune trium nostrorum corporum vniformiter in directum

rectum progredi, vnde ad quoduis tempus eius situm seu distantiam $OG = v$ facillime assignare licebit, hoc obseruato sufficiet binas tantum distantias inter corpora nosse, quo pacto tota inuestigatio ad pauciores quantitates variabiles reducetur. Si enim ponamus distantiam $AB = p$ et distantiam $BC = q$, ita vt sit $y - x = p$ et $z - y = q$, erit $z - x = p + q$. Deinde ob $y = x + p$ et $z = x + p + q$, tres aequationes primo inuentae has induent formas:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{B}{pp} + \frac{C}{(p+q)^2};$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial x + \partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{A}{pp} + \frac{C}{qq};$$

$$\text{III. } \frac{\partial\partial x + \partial\partial p + \partial\partial q}{\partial t^2} = -\frac{A}{(p+q)^2} - \frac{B}{qq};$$

vnde si prima a secunda, tum vero secunda a tertia subtrahatur, impetrabuntur binae sequentes aequationes pro definiendis ad quoduis tempus t binis nouis variabilibus p et q:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{qq} - \frac{C}{(p+q)^2};$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(p+q)^2} - \frac{(B+C)}{qq}.$$

§. 11. Quoniam primo inuenimus esse

$$Ax + By + Cz = \alpha t + \beta,$$

si loco y et z valores supra assignatos substituamus, habebimus

$$(A+B+C)x + (B+C)p + Cq = \alpha t + \beta.$$

Per centrum autem grauitatis G reperta est haec aequatio:

$$(A+B+C)v = \alpha t + \beta,$$

vnde tres quantitates x, y et z definire poterimus; erit scilicet

$$x = v - \frac{(B+C)p - Cq}{A+B+C},$$

hincque porro fiet

$$y = v + \frac{Ap - Cq}{A+B+C} \text{ et}$$

$$z = v + \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C}.$$

§. 12. Quia centrum grauitatis G vel quiescit vel vniformiter in directum progreditur, posteriore casu, si toti systemati motus aequalis et contrarius ei, quo centrum grauitatis procedit, imprimi concipiatur, centrum grauitatis ad quietem redigetur. Quare cum nihil impediat, quominus punctum fixum O in ipso centro grauitatis G constituamus, ponamus $v = 0$, eritque multo simplicius:

$$x = \frac{-(B+C)p - Cq}{A+B+C} = GA,$$

$$y = \frac{Ap - Cq}{A+B+C} = GB,$$

$$z = \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C} = GC,$$

Sicque simulac quantitates p et q assignare licuerit, etiam singulorum corporum loca innotescent.

§. 13. Hinc etiam aequationem, quam supra integrare licuit, quae erat

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta,$$

ad istum casum accommodare licebit. Ponamus autem breuitatis gratia $A + B + C = \Sigma$, eritque

$$A\partial x^2 = \frac{A}{\Sigma^2}(B^2\partial p^2 + 2BC\partial p(\partial p + \partial q) + C^2(\partial p + \partial q)^2),$$

$$B\partial y^2 = \frac{B}{\Sigma^2}(A^2\partial p^2 - 2AC\partial p\partial q + C^2\partial q^2),$$

$$C\partial z^2 = \frac{C}{\Sigma^2}(A^2(\partial p + \partial q)^2 + 2AB\partial q(\partial p + \partial q) + B^2\partial q^2),$$

quae tres formulae in vnam summam collectae dabunt:

$$\frac{1}{\Sigma^2}\left\{\begin{array}{l} + AB(A+B)\partial p^2 + AC(A+C)(\partial p + \partial q)^2 \\ + BC(B+C)\partial q^2 + 2ABC(\partial p + \partial q)^2 \end{array} - 2ABC\partial p\partial q\right\},$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\Sigma}(AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2),$$

quo valore substituto aequatio illa integrata transmutabitur in hanc formam:

$$\frac{AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2}{(A+B+C)\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta.$$

§. 14.

§. 14. Quanquam haec aequatio ſatis eſt concinna et elegans, neutiquam tamen vlla via patet, inde ſolutionem quaeſtionis deriuandi, ita vt iſta quaeſtio merito profundiſſimae indaginis ſit cenſenda, et quicunque ſtudium et operam in his aequationibus reſoluendis conſumere voluerit, mox percipiet, ſe oleum et operam perdidiſſe; vnde manifeſto liquet, quid de iis ſit iudicandum, qui ſe iactant, in ſolutione problematis generalis de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſatis felici cum ſucceſſu elaboraſſe.

§. 15. Praecipua cauſa harum difficultatum in eo poſita eſſe videtur, quod iſta quaeſtio adhuc nimis eſt generalis, quoniam ad maſſas trium corporum quascunque atque ad motus quoscunque, qui iis imprimi potuerunt, extenditur. Datur enim vtique caſus maxime ſpecialis, quo motum horum trium corporum reuera aſſignare licet; ſemper enim eiusmodi motum in his corporibus concipere datur, vt binae diſtantiae p et q perpetuo eandem inter ſe rationem ſeruent, ad quem caſum euoluendum ponatur $q = np$, ac duae aequationes §. 10. datae ſequentem formam induent:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{nnpp} - \frac{C}{(1+n)^2 pp};$$

$$\text{II. } \frac{n\partial\partial p}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(1+n)^2 pp} - \frac{(B+C)}{nnpp}.$$

§. 16. Statim autem hic perſpicitur, eiusmodi relationem inter numerum n et maſſas A, B, C exiſtere poſſe, vt hae duae aequationes euadant identicae, id quod eueniet, ſi membrum dextrum prius per n multiplicatum aequale ſtatuatur poſteriori, ex quo naſcetur haec aequatio:

$$-n(A+B) + \frac{C}{n} - \frac{nC}{(1+n)^2} = A - \frac{A}{(1+n)^2} - \frac{(B+C)}{nn},$$

vnde numerum n per reſolutionem elicere licebit; haec autem aequatio ſtatim contrahitur in hanc formam:

$$-n(A+B)+\frac{(1+2n)C}{n(1+n)^2}=\frac{(2n+nn)A}{(1+n)^2}-\frac{(B+C)}{nn},$$

quae ducta in $n^2(1+n)^2$ a fractionibus liberabitur, eritque

$$-(A+B)n^3(1+n)^2+Cn(1+2n)=An^2(2n+nn)$$
$$-(B+C)(1+n)^2,$$

in qua aequatione incognita n ad quintam poteſtatem aſſurgit, ideoque difficillimam reſolutionem poſtulat. Notetur autem hanc aequationem ſecundum litteras A, B et C diſpoſitam fieri

$$An^3(3+3n+nn)-B(1+n)^2(1-n^3)-C(1+3n+3nn)=0.$$

Certum autem eſt hanc aequationem vnam ad minimum habere radicem realem, quae ſi fuerit poſitiua, ſolutionem praebet deſideratam. At quia hinc coëfficiens ſupremi termini fit $A+B$, ideoque ſemper poſitiuus, terminus autem abſolutus eſt $=(B+C)$, ideoque ſemper negatiuus, id indicium eſt, iſtam aequationem certe habere radicem realem poſitiuam, qua ergo negotium noſtrum conficietur.

§. 17. Caſus hic imprimis notatu dignus occurrit, quo ambo corpora extrema A et C ſtatuuntur inter ſe aequalia, poſito enim $C=A$, aequatio habebit hanc formam:

$$A(n-1)(n^4+4n^3+7nn+4n+1-B(n+1)^2(1-n^3)=0,$$

quae manifeſto habet factorem $n-1$, ita vt ſit $n=1$ et $q=p$; hoc ergo caſu, ſi modo ambo corpora extrema a medio fuerint aequaliter remota et aequales motus acceperint, tum perpetuo a corpore medio aequaliter diſtabunt, et motu ſatis regulari eo pertingent. Poſtquam autem illam aequationem per $n-1$ diuiſerimus, prodit iſta:

$$A(n^4+4n^3+7nn+4n+1)+B(n+1)^2(nn+n+1)=0,$$

cuius nullam amplius radicem poſitiuam eſſe poſſe manifeſtum eſt.

§. 18.

§. 18. Inuento autem valore idoneo pro littera n, quoniam ambae aequationes principales identicae euadunt, si ponamus $-A-B+\frac{C}{nn}-\frac{C}{(1+n)^2}=N$, totus motus definiri debebit ex hac aequatione: $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2}=\frac{N}{pp}$, quae ducta in ∂p et integrata dat $\frac{\partial p^2}{2\partial t^2}=-\frac{N}{p}+\frac{N}{a}$; vbi cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis, euidens est, corpus fuisse in quiete vbi fuerit $p=a$. Cum igitur sit $\frac{\partial p}{\partial t\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{N(p-a)}}{ap}$, inde colligitur

$$\partial t\sqrt{2N}=\frac{\partial p\sqrt{ap}}{\sqrt{(p-a)}}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(pp-ap)}},$$

quae per logarithmos facile integratur. Sin autem quantitas N fuerit negatiua, puta $N=-M$, aequatio erit

$$\partial t\sqrt{2M}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}},$$

cuius integratio per arcus circulares absoluitur. Facile autem ostendi potest, valorem N semper esse negatiuum; si enim foret positiuus, quia motus initio fuerat $p=a$, sequeretur deinceps distantiam p augeri, seu ex formula $\sqrt{(p-a)}$ sequeretur, deinceps fieri $p>a$, quod est absurdum.

§. 19. Consideremus casum supra memoratum quo $C=A$ et $n=1$, ideoque $q=p$; aequatio igitur motum definiens, ob $N=-B-\frac{A}{4}$ ideoque negatiuum, et $M=B+\frac{1}{4}A$, erit

$$\partial t\sqrt{(2B+\tfrac{1}{2}A)}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}.$$

Cum igitur sit

$$\partial.\sqrt{(ap-pp}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p-p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}},\text{ erit}$$

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}-\partial.\sqrt{(ap-pp)},$$

vnde integrando erit

$t\sqrt{}$

$$t\sqrt{\frac{2B+\frac{1}{2}A}{a}} = \int \frac{\frac{1}{2}a\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} - \sqrt{(ap-pp)}.$$

Eſt vero

$$\int \frac{\frac{1}{2}a\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} = a\,A\,\text{ſin.}\sqrt{(\tfrac{p}{a}},$$

ita vt habeamus:

$$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(2B+\frac{1}{2}A)}}\left(a\,A\,\text{ſin.}\sqrt{\tfrac{p}{a}} - \sqrt{ap-pp}\right).$$

Quoniam autem caſus quo $q = np$ vnicus eſt, quem etiam nunc reſoluere licet, is vtique meretur vt eius ſolutionem clarius ob oculos ponamus.

EVOLVTIO CASVS
quo binae diſtantiae AB et BC perpetuo eandem inter ſe rationem conſeruant.

§. 20. Cum poſuerimus $AC = p$ et $BC = q$, ſtatuamus, vt modo fecimus, $q = np$, ac vidimus, hunc numerum n ex iſta aequatione definiri debere:

$$An^3(nn+3n+3) - B(1+n)^2(1-n^3) - C(1+3n+3nn) = 0,$$

quae ſecundum poteſtates ipſius n diſpoſita hanc formam accipit:

$$(A+B)n^5 + (3A+2B)n^4 + (3A+B)n^3 - (3C+B)nn$$
$$- (3C+2B)n - B - C = 0,$$

quae, cum ſit ordinis quinti, et termini contrariis ſignis afficiantur, ſemper vnam habebit radicem realem poſitiuam, quae ergo ad noſtrum inſtitutum erit accommodata, propterea quod diſtantia $BC = q$ per hypotheſin eſt poſitiua.

§. 21.

§. 21. Inuento autem tali valore idoneo pro n, quaeratur quantitas M, vt ſit $M = A + B - \frac{C}{nn} + \frac{C}{(1+n)^2}$. Cum igitur ex ſuperiore aequatione ſit

$$B = \frac{A n^3 (nn + 3n + 3) - C(1 + 3n + 3nn)}{(1+n)^2 (1 - n^3)},$$

hoc valore introducto erit

$$M = \frac{A(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{(1+n)^2 (1 - n^3)} - \frac{C(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1+n)^2 (1 - n^3)},$$

ſiue

$$M = \frac{(Ann - C)(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1+n)^2 (1 - n^3)},$$

qui valor, cum vt iam obſeruauimus ſemper debeat eſſe poſitiuus, hinc concludere licet, quoties fuerit $Ann > C$, toties eſſe debere $n < 1$; contra vero ſi fuerit $Ann < C$, tum ſemper fore $n > 1$.

§. 21. His circa numerum M obſeruatis, ſupra inuenimus hanc aequationem differentialem inter p et t

$$\partial t \sqrt{2M} = \frac{p \partial p \sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}};$$

vnde cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem, qua interuallum $AB = p$ creſcit, erit iſta celeritas $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sqrt{2M(ap - pp)}}{p\sqrt{a}}$. Sin autem diſtantiae inter corpora decreſcant, quoniam extractio radicis quadratae huc perduxit, ſcribi debet

$$\partial t \sqrt{2M} = -\frac{p \partial p \sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}}.$$

Vtroque caſu ergo diſcimus, vbi fiet $p = a$ ideoque $q = na$, tum vtramque corporis celeritatem fieri $= 0$. At ſi eueniat $p = 0$, id quod in ipſo corporum contactu contingit, tum vtramque celeritatem fieri infinitam. Verum, ob extenſionem corporum, fieri nequit, vt haec tria corpora in vnum punctum conueniant.

§. 23. Denuo autem istam aequationem differentialem integrare licebit; cum enim sit

$$\frac{\partial t \sqrt{2M}}{\sqrt{a}} = \frac{p \partial p}{\sqrt{(ap - pp)}} = -\sqrt{(ap - pp)} + \frac{\frac{1}{2} a \partial p}{\sqrt{(ap - pp)}},$$

erit integrale

$$t \sqrt{\frac{2M}{a}} = \alpha - \sqrt{(ap - pp)} + a \text{ A fin. } \sqrt{\frac{p}{a}},$$

in qua formula signa erunt mutanda, si distantia p decrescat. Verum ipse calculus istud discrimen innuit: si enim tempus t computemus ab eo statu, quo fuerat $p = a$, atque adeo celeritas concursus nulla, constantem α hinc definire licet; fiet enim $0 = \alpha + \frac{a\pi}{2}$, vnde fit $\alpha = -\frac{a\pi}{2}$. Quoniam autem ab hoc statu corpora ad se mutuo accedunt, mutatis signis erit

$$t \sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \sqrt{(ap - pp} - a \text{ A fin. } \sqrt{\frac{p}{a}},$$

vnde patet, corpora inuicem esse coitura, ponendo $p = 0$, elapso tempore $t = \frac{1}{2} \pi \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}$.

§. 24. Quo hanc expressionem propius ad vsum accommodemus, introducamus angulum Φ, cuius sinus sit $\sqrt{\frac{p}{a}}$, vnde fiet $p = a \text{ fin. } \Phi^2$ et $q = n a \text{ fin. } \Phi^2$; tum autem erit

$$\sqrt{(ap -- pp)} = a \sqrt{\text{fin. } \Phi \text{ cof. } \Phi} = \frac{1}{2} a \text{ fin. } 2\Phi.$$

Hinc igitur aequatio nostra integralis erit

$$t \sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \frac{a}{2} \text{ fin. } 2\Phi - a\Phi, \text{ ideoque}$$

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \text{ fin. } 2\Phi - \Phi\right).$$

Quod si hic porro ponamus $\frac{\pi}{2} - \Phi = \frac{1}{2}\omega$, erit $\text{fin. } 2\Phi = \text{fin. } \omega$, hocque valore substituto fiet

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2M}} (\omega + \text{fin. } \omega).$$

§. 25.

§. 25. Ecce igitur ſolutio huc eſt reducta, vt ad datum tempus t quaeri debeat angulus ω, ita vt ſit

$$\omega + \text{ſin.}\, \omega = \frac{2t\sqrt{2M}}{a\sqrt{a}},$$

quo inuento, cum ſit $\Phi = 90° - \frac{1}{2}\omega$, ideoque ſin. $\Phi =$ coſ. $\frac{1}{2}\omega$, pro hoc tempore reperietur diſtantia

$$AB = p = a\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\omega^2 = \tfrac{1}{2} a (1 + \text{coſ.}\, \omega), \text{ et}$$

$$q = \tfrac{1}{2} n a (1 + \text{coſ.}\, \omega).$$

CONSIDERATIO CASVS
quo maſſa vnius corporis plane euaneſcit.

§. 26. Quoniam maſſae trium corporum praecipuam cauſſam continent omnium difficultatum, quibus haec quaeſtio premitur, non immerito ſuſpicari licet, has difficultates maximam partem diſſipari debere, ſi vni trium corporum tribuatur maſſa euaneſcens, ita vt ab hoc corpore motus duorum reliquorum plane non turbetur, quae ergo inter ſe motu maxime regulari ferentur, quaſi tertium corpus plane abeſſet. Poſito autem $C = 0$, diſtantiis vero vt ſupra $AB = p$ et $BC = q$, pro motu determinando habebuntur duae ſequentes aequationes: I. $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp}$ et II. $\frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}$.

§. 27. Hic ſtatim aequationem priorem integrare licet, quae poſito breuitatis gratia $A + B = m$ fit

$$\frac{\partial p^2}{2\partial t^2} = +\frac{m}{p} - \frac{m}{a} = \frac{m(a-p)}{ap},$$

vnde fit $\partial t^2 = \frac{ap\partial p^2}{2m(a-p)}$, qui valor ſi in altera aequatione ſubſtituatur, prodibit aequatio binas tantum variabiles p et q inuoluens, a cuius ergo reſolutione totum negotium pendebit. Cum autem in altera aequatione elementum ∂t pro con-

 ſtante

ſtante ſit aſſumtum, quo haec conſideratio exuatur, multiplicetur aequatio per ∂q, et repraeſentari poterit ſub hac forma:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \partial \cdot \frac{\partial q^2}{\partial t^2} = \frac{A \partial q}{pp} - \frac{B \partial q}{qq} - \frac{A \partial q}{(p+q)^2},$$

vnde, facta ſubſtitutione, inter quantitates p et q obtinebitur iſta aequatio:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \partial \cdot \frac{2m(a-p)\partial q^2}{a p \partial p^2} = \frac{A \partial q}{pp} - \frac{B \partial q}{qq} - \frac{A \partial q}{(p+q)^2}.$$

Interim tamen haec aequatio, quomodocunque tractetur, omne ſtudium in ea reſoluenda fruſtra impendi deprehendetur, ſolo caſu excepto, quo ambae quantitates p et q conſtantem inter ſe tenent rationem. Si enim ponamus $q = np$, ob $\partial q = n \partial p$, aequatio hanc induet formam:

$$\tfrac{1}{2} \partial. \frac{2mnn(a-p)}{ap} = \frac{nA\partial p}{pp} - \frac{B \partial p}{npp} - \frac{nA\partial p}{pp(1+n)^2},$$

membrum vero ſiniſtrum euolutum dat $-\frac{2mnn\partial p}{pp}$, vnde totam aequationem per $\frac{\partial p}{pp}$ diuidendo prodit

$$-mnn = nA - \frac{B}{n} - \frac{nA}{(1+n)^2},$$

quae nullam amplius variabilem continet, ſed ipſi numero n inueniendo inſeruit. Facile autem patet ob $m = A + B$, eandem haberi aequationem, quam iam ſupra pro numero n definiendo dedimus, ſi quidem ponatur $C = 0$, vnde huic caſui immorari ſuperfluum foret.

§. 28. Euoluamus autem in genere membrum ſiniſtrum, ac ſumendo elementum ∂p conſtans, haec aequatio euoluta emerget:

$$\frac{2m(a-p)\partial\partial q}{ap\partial p^2} - \frac{m \partial q}{pp\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2},$$

pro qua reſoluenda nulla plane via patet, atque omnia artificia, quae adhuc ſunt inuenta, nequicquam in ſubſidium vocantur. Quin etiam, quamuis ſumamus $a = \infty$, quo caſu aequatio

aequatio ſit homogenea, nihil tamen praeſtari poſſe deprehendemus; aequatio autem habebit hanc formam:

$$\frac{2m\,\partial\partial q}{p\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{p\,p\,\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}.$$

Facile enim intelligitur, ſi haec aequatio vires noſtras ſuperet, prioris ſolutionem fruſtra ſuſcipi.

§. 29. Quoniam haec poſtrema aequatio eſt homogenea, eam more ſolito tractemus, ponendo $q = up$ et $\partial q = s\partial p$, vnde ſtatim fit $\frac{\partial p}{s} = \frac{\partial u}{s-u}$. Facta autem hac ſubſtitutione ipſa aequatio induet ſequentem formam:

$$\frac{2m\,\partial s}{p\,\partial p} - \frac{m\,s}{pp} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{uupp} - \frac{A}{pp(1+u)^2},$$

quae multiplicata per $p\,\partial p$ praebet

$$2m\,\partial s = \frac{\partial p}{p}\left(m\,s + A - \frac{B}{uu} - \frac{A}{(1+u)^2}\right),$$

vnde ſi loco $\frac{\partial p}{p}$ ſcribatur valor modo datus $\frac{\partial u}{s-u}$, per eumque diuidatur, peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{2m\,\partial s\,(s-u)}{\partial u} = m\,s + A - \frac{A}{(1+u)^2} - \frac{B}{uu},$$

vbi notetur eſſe $m = A + B$, quae quanquam eſt primi gradus et duas tantum variabiles s et u inuoluit, fruſtra tamen omnis labor in ea ſoluenda impendi videtur, vnde multo minus quicquam circa aequationem aliquanto generaliorem, in qua inerat conſtans a, ſperare licebit, niſi forte quis obiicere velit, ſi inſuper vel maſſa A vel B euaneſcens ſtatueretur, ſolutionem facile perfici poſſe, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, neque hic efferri meretur.

SOLVTIO PROBLEMATIS MECHANICI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 13 Mart. 1779.

§. 1.

Tab. III. Fig. 4. Confidero hic duos cyclindros plano horizontali incumbentes O A a et in figura per circulos C A B et $c\,a\,b$, qui eorum bafes referant, repraefentatos; tum vero concipio funiculum feu filum vtrique circumuolutum, quod vbi priorem in T deferit, inde ad alterum porrigatur, quem in t contingat, hincque eius peripheriae per β et b applicetur. Quibus pofitis quaeftio refoluenda in hoc verfatur, vt poftquam altervtri cylindro vel etiam vtrique motus quicunque fuerit impreffus, continuatio huius motus per principia Mechanica determinetur; huiusmodi quidem quaeftiones facile innumerabiles excogitari poffunt, quae autem eatenus tantum attentione dignae funt cenfendae, quatenus folutiones concinnas et elegantes fuppeditant, atque hoc refpectu praefens problema maxime memoratu dignum videtur.

§. 2. Ad hoc problema foluendum ponamus pro priore cylindro C A B eius radium C A $= a$, eius pondus feu maffam $= m$, tum vero eius momentum inertiae refpectu axis fumptum $= n$, pro altero vero cylindro $c\,a\,b$ fit eius radius

$c\,a$

$c\,a = \alpha$, eius maſſa ſeu pondus $= \mu$, eiusque momentum inertiae $= \nu$, vbi cum momentum inertiae reperiatur, ſi ſingula maſſae elementa per quadrata diſtantiae ab axe multiplicentur, atque omnia haec producta in vnam ſummam colligantur, euidens eſt, ſi vniuerſa maſſa vtriusque cylindri per eius peripheriam eſſet diſtributa, tum futurum eſſe $n = m\,a\,a$ et $\nu = \mu\,\alpha\,\alpha$, quando autem maſſa per totum volumen eſt diffuſa, neceſſe eſt, vt fiat $n < m\,a\,a$ et $\nu < \mu\,\alpha\,\alpha$.

§. 3. Sumamus nunc elapſo tempore ab initio motus $= t$, ambos cylindros eum ſitum tenere, qui in figura repraeſentatur, atque ponamus diſtantias a puncto fixo O ſumptas $O\,A = x$, $O\,a = y$, praeterea vero ſtatuamus interuallum $A\,a = z$, ita vt ſit $y = x + z$. Nunc ante omnia conſiderari oportet portionem fili $T\,t$ a priore cylindro ad alterum porrecti, quae ſcilicet priorem cylindrum in T, alterum vero in t tangat; vnde ad baſin demittamus perpendicula $T\,P$ et $t\,p$: ponamus vero inclinationem huius lineae $T\,t$ ad horizontem eſſe $= \omega$, ductisque radiis $C\,T$ et $c\,t$, euidens eſt fore angulum $A\,C\,T = \omega$ et $\beta\,c\,t = \omega$, ſumpto ſcilicet β in ſummitate poſterioris cylindri, hincque colligimus interualla $A\,P = a$ ſin. ω et $a\,p = \alpha$ ſin. ω, tum vero perpendicula erunt

$$T\,P = a\,(1 - \text{coſ.}\ \omega) \text{ et } t\,p = \alpha\,(1 + \text{coſ.}\ \omega),$$

hinc igitur erit interuallum

$$P\,p = z - (a + \alpha)\ \text{ſin.}\ \omega.$$

Deinde erit

$$t\,p - T\,P = \alpha - a + (a + \alpha)\ \text{coſ.}\ \omega.$$

§. 4. Hinc iam facile deducitur relatio inter ſpatium z et angulum ω, cum enim ſit tang. $\omega = \frac{t\,p - T\,P}{P\,p}$, erit valoribus

bus substitutis

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\alpha - a + (a+\alpha)\,\text{cos}.\,\omega}{z - (a+\alpha)\,\text{sin}.\,\omega} = \frac{\text{sin}.\,\omega}{\text{cos}.\,\omega},$$

vnde sublatis fractionibus haec deducitur aequatio:

$$a + \alpha - (a - \alpha)\,\text{cos}.\,\omega = z\,\text{sin}.\,\omega.$$

Porro vero pro ipso interuallo $T\,t$ inueniendo notetur esse $\text{cos}.\,\omega = \frac{P\,p}{T\,t}$, vnde colligitur

$$T\,t = \frac{P\,p}{\text{cos}.\,\omega} = \frac{z - (a+\alpha)\,\text{sin}.\,\omega}{\text{cos}.\,\omega},$$

vel etiam, cum sit $\text{sin}.\,\omega = \frac{t\,p - T\,P}{T\,t}$, erit

$$T\,t = \frac{\alpha - a + (a+\alpha)\,\text{cos}.\,\omega}{\text{sin}.\,\omega}.$$

Cum iam ex praecedente aequatione sit

$$a + \alpha = z\,\text{sin}.\,\omega + (a - \alpha)\,\text{cos}.\,\omega,$$

hoc valore substituto reperiemus

$$T\,t = z\,\text{cos}.\,\omega - (a - \alpha)\,\text{sin}.\,\omega.$$

§. 5. Perpendamus nunc etiam motum rotatorium vtriusque cylindri; hunc in finem ducantur radii horizontales $C\,B$ et $c\,b$, atque sumamus puncta, quae initio motus fuerant in B et b, nunc translata esse in S et s, ita vt motus rotatorius prioris cylindri factus sit per angulum $B\,C\,S = s$ et posterioris cylindri per angulum $b\,c\,s = \sigma$, quodsi iam pro statu initiali ponamus longitudinem fili a puncto B ad punctum b porrecti fuisse $= f$, atque necesse est vt etiam nunc longitudo fili a puncto S vsque in s porrecti sit $= f$, siue debet esse

$$S\,B + B\,A + A\,T + T\,t + t\,\beta + \beta\,b - s\,b = f.$$

§. 6. Designemus igitur singulas has partes suis simbolis, et cum sit arcus $B\,S = a\,s$; $B\,A = \frac{1}{2}\pi\,a$; $A\,T = a\,\omega$; $T\,t = z\,\text{cos}.\,\omega - (a-\alpha)\,\text{sin}.\,\omega$; $t\,\beta = \alpha\,\omega$; $\beta\,b = \frac{1}{2}\pi\,\alpha$ et $s\,b = \alpha\,\sigma$, habebimus hanc aequationem:

$f =$

$$f = a s + \tfrac{1}{2}\pi(a + \alpha) + \omega(\alpha + \alpha) - \alpha\sigma$$
$$- (a - \alpha) \sin.\omega + z \cos.\omega.$$

Quare cum haec expreſſio perpetuo debeat manere eadem, eius differentiale debet euaneſcere; hincque nanciſcemur iſtam aequationem

$$0 = a\,\partial s - \alpha\,\partial\sigma + (a + \alpha)\,\partial\omega - (a - \alpha)\,\partial\omega \cos.\omega$$
$$+ \partial z \cos.\omega - z\,\partial\omega \sin.\omega,$$

quae ob

$$z \sin.\omega = a + \alpha - (a - \alpha)\cos.\omega$$

abit in iſtam formam ſimpliciſſimam

$$0 = a\,\partial s - \alpha\,\partial\sigma + \partial z \cos.\omega.$$

§. 7. His praeparatis principia motus in ſubſidia vocemus, et cum nulla alia adſit vis motum vtriusque cylindri ſollicitans praeter tenſionem fili $T\,t$, quam ſtatuamus $= \theta$, quippe qua prior cylindrus vrgetur in directione $T\,t$, poſterior vero in directione $t\,T$, ab hac igitur vi motus progreſſiuus prioris cylindri perinde afficietur, ac ſi centro C eſſet applicata; vnde cum motus progreſſiuus ſit horizontalis, quo iam ſpatium x eſt percurſum, pro hac directione vis θ praebet $\theta \cos.\omega$, quae per maſſam m diuiſa praebet accelerationem, vnde oritur haec aequatio $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{\theta \cos.\omega}{m}$, ſimilique modo pro altero cylindro, quia vis in plagam contrariam tendit, habebitur haec aequatio $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = -\frac{\theta \cos.\omega}{\mu}$, vbi elementum temporis ∂t ſumitur conſtans, hinc vim iſtam incognitam θ elidendo orietur $\frac{m\,\partial\partial x + \mu\,\partial\partial y}{\partial t^2} = 0$, vnde integrando colligitur

$$m\,\partial x + \mu\,\partial y = A\,\partial t,$$

quae ob $y = x + z$ tranſit in hanc

$$(m + \mu)\,\partial x + \mu\,\partial z = A\,\partial t.$$

§. 8. Contemplemur nunc etiam motum gyratorium vtriusque cylindri, et cum vis sollicitantis θ momentum respectu axis motus C sit $= a\theta$ motui aduersans, si per momentum inertiae diuidamus, habebimus hanc aequationem $\frac{\partial\partial s}{\partial t^2} = -\frac{a\theta}{n}$, similique modo pro altero cylindro, vbi vis motum promouet, habebimus $\frac{\partial\partial\sigma}{\partial t^2} = \frac{\alpha\theta}{\nu}$, vnde elidendo θ habebimus

$$\frac{\frac{n}{a}\partial\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\partial\sigma}{\partial t^2} = 0,$$

vnde integrando elicimus

$$\frac{n}{a}\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\sigma = B\,\partial t.$$

Praeterea vero insuper tertiam aequationem $a\theta$ liberam deducere licet, cum sit $\frac{\partial\partial s}{\partial\partial x} = -\frac{a\,m}{n\,\text{cos}.\,\omega}$. Sicque praeter binas aequationes ante inuentas ex principiis motus nacti sumus tres nouas aequationes, vnde totam solutionem petere debebimus.

§. 9. Has igitur aequationes hic coniunctim ante oculos ponamus, quae sunt

I. $z\,\text{sin}.\,\omega = a + \alpha - (a - \alpha)\,\text{cos}.\,\omega$,

II. $a\,\partial s - \alpha\,\partial\sigma + \partial z\,\text{cos}.\,\omega = 0$,

III. $(m + \mu)\,\partial x + \mu\,\partial z = A\,\partial t$,

IV. $\frac{n}{a}\partial s + \frac{\nu}{\alpha}\partial\sigma = B\,\partial t$,

V. $\frac{\partial\partial s}{\partial\partial x} = \frac{-a\,m}{n\,\text{cos}.\,\omega}$,

quae aequationes vtique sufficiunt, quandoquidem tantum sex quantitates variabiles occurrunt z, ω, s, σ, x et t.

§. 10. Vt iam calculum a differentialibus secundi gradus liberemus, quoniam elementum temporis ∂t constans est assumptum, vtamur sequentibus characteribus $\partial z = z'\,\partial t$;

∂x

$\partial x = x' \partial t$; $\partial s = s' \partial t$; $\partial \sigma = \sigma' \partial t$; vnde manente aequatione prima, reliquae reducentur ad ſequentes formas

$$\text{II. } a s' - \alpha \sigma' + z' \operatorname{coſ.} \omega = 0,$$
$$\text{III. } (m + \mu) x' + \mu z' = A,$$
$$\text{IV. } \frac{n}{a} s' + \frac{\nu}{\alpha} \sigma' = B,$$
$$\text{V. } \frac{\partial s'}{\partial x'} = - \frac{a m}{n \operatorname{coſ.} \omega}.$$

Iam ex III. deducimus $x' = \frac{A - \mu z'}{m + \mu}$, hincque $\partial x' = - \frac{\mu \partial z'}{m + \mu}$. Porro vero ex IV. deriuamus $\sigma' = \frac{\alpha a B - \alpha n s'}{a \nu}$, qui valor in ſecunda ſubſtitutus dat

$$(\nu a a + n \alpha \alpha) s' + a \nu z' \operatorname{coſ.} \omega - \alpha \alpha a B = 0,$$

quae differentiata dat

$$(\nu a a + n \alpha \alpha) \partial s' = - \nu a \partial . z' \operatorname{coſ.} \omega, \text{ vnde fit}$$
$$\partial s' = - \frac{\nu a \partial . z' \operatorname{coſ.} \omega}{\nu a a + n \alpha \alpha}.$$

Conſequenter quinta aequatio, quae eſt

$$n \partial s' \operatorname{coſ.} \omega + m a \partial x' = 0,$$

tranſibit in hanc

$$\frac{\nu n a \operatorname{coſ.} \omega \partial . z' \operatorname{coſ.} \omega}{\nu a a + n \alpha \alpha} + \frac{\mu m a \partial z'}{m + \mu} = 0.$$

§. 11. Ponamus nunc breuitatis gratia

$$\frac{m \mu (\nu a a + n \alpha \alpha)}{n \nu (m + \mu)} = \lambda,$$

vt obtineamus hanc aequationem ſatis ſimplicem

$$\operatorname{coſ.} \omega \partial . z' \operatorname{coſ.} \omega + \lambda \partial z' = 0,$$

quae ducta in $2 z'$ et integrata praebet hanc aequationem integralem $z'^2 \operatorname{coſ.} \omega^2 + \lambda z'^2 = \Delta^2$, vnde colligimus $z' = \frac{\Delta}{\sqrt{(\lambda + \operatorname{coſ.} \omega^2)}}$. Sicque relationem ſumus conſecuti inter z' et ω, cum ante habuiſſemus relationem inter z et ω, vnde cum poſitum ſit

$\partial z = z' \partial t$, etiam relationem inter tempus t et angulum ω definire poterimus; cum enim fit

$$z = -\frac{a + \alpha - (a - \alpha)\, cof.\, \omega}{fin.\, \omega},$$

erit differentiando

$$\partial z = -\frac{(a + \alpha)\, \partial \omega\, cof.\, \omega + (a - \alpha)\, \partial \omega}{fin.\, \omega^2} = z' \partial t,$$

vnde fit

$$\partial t = \frac{\partial \omega\, (a - \alpha - (a + \alpha)\, cof.\, \omega)\, \sqrt{(\lambda + cof.\, \omega^2)}}{\Delta\, fin.\, \omega^2},$$

vnde, conceffa integratione, ex dato angulo ω tempus t, hincque viciffim ad datum tempus t angulum ω affignare licebit.

§. 12. Hoc itaque modo problema noftrum perfecte eft folutum, namque ex angulo ω per primam aequationem ftatim innotefcit z, hincque porro ex tertia colligitur x; fimili modo ex z deducimus etiam s, ex eoque porro reliquae quantitates y et σ; vbi notatu dignum vfu venit, quod tota folutio tandem ad formulas integrales non adeo complicatas fuerit perducta.

SUR
LE MOUVEMENT GYRATOIRE
D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

PAR
JACQUES BERNOULLI.

Préſenté à l'Académie le 8 *Octobre* 1787.

Troiſiéme Mémoire.

Dans les précédens Mémoires ſur cette matiére j'ai traité deux cas différens, où le corps, mû toûjours dans le même plan horizontal ou vertical, & doüé de ce qu'on appelle un *mouvement gyratoire*, ne décrivoit qu'une courbe à ſimple courbure. Il me reſte à examiner le cas, où le corps avec ſon fil A C toûjours tendu, & faiſant un angle aigu BAC quelconque avec la verticale A B, eſt animé d'un *mouvement turbinatoire* autour de cette verticale, & décrit parconſéquent à-cauſe des extenſions & reſſerremens alternatifs du fil une courbe à double courbure. Mais je dois prévenir ici le lecteur, que peu ſatisfait moi-même de mes recherches, j'eſpere encore moins de le contenter parfaitement, & que malgré les reſtrictions que je donne dans la ſuite à mon problème, je n'oſe propoſer mes refléxions & leur réſultat que comme un eſſai ou une tentative pour exciter l'attention des Géomètres, qui pourroient trouver dans ce ſujet quelque attrait

Tab. III. Fig. 5.

attrait pour leurs méditations, & qui y porteroient plus de capacité à le manier que moi.

Tab. III. Fig. 6. §. 1. Soit la courbe rapportée à trois axes perpendiculaires entre eux, dont l'un A B soit vertical, & les deux autres A C, A E horizontaux; soyent nommées les coordonnées, paralléles à ces axes, $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$; l'élément de la courbe $Nn = \partial s$, l'élément du tems, supposé constant, $= \partial t$, la masse du corps en mouvement $= M$, l'espace décrit par la chute libre d'un corps dans l'espace d'une seconde $= g$. La longueur naturelle du fil $= a$, sa longueur A N, quand le corps est en N, $= a + \zeta = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. La plus grande extension possible du fil étant $= \theta$, & le poids requis pour la produire $= P$, on aura la tension ou la force resserrante pour la longueur $a + \zeta = \frac{P\zeta}{\theta}$, que nous nommerons au commencement $= \Pi$. De plus, le rayon osculateur en N étant $= \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial\partial x + \partial\partial y^2 + \partial\partial z^2 - \partial\partial s^2)}}$, (voyez *Euleri methodus facilis omnia symptomata linearum curuarum non in eodem plano sitarum inuestigandi.* Diff. prior §. 9. in *Actis Acad. Scient. Petropol. pro Anno* 1782. *P. I.*) laquelle expression je ferai $= R$, & la vitesse du corps en N étant $= \frac{\partial s}{\partial t}$, on aura la force centrifuge dans ce même point $N = \frac{M\,\partial s^2}{R\,\partial t^2}$, que je nommerai $= V$. Les trois forces qui agissent sur le corps, sont donc M, Π et V, qu'il faut résoudre suivant la direction des trois axes principaux de la courbe. De plus, les forces qui naissent de M & de Π, devront être multipliées par $2g$; mais pour celles, qui proviendront de la décomposition de V, cela ne sera pas nécessaire, puisque la vitesse $\frac{\partial s}{\partial t}$ est supposée exprimée par le nombre de pieds, qu'elle peut faire parcourir au corps dans une seconde.

§. 2.

§. 2. Or la prémiére M agissant verticalement, n'a pas besoin de décomposition, & donne une force accélératrice $= + \frac{2gM}{M} = 2g$, dans le sens de l'axe vertical.

§. 3. La seconde force Π étant décomposée, donnera les trois forces $\frac{\Pi x}{a + \zeta}$, $\frac{\Pi y}{a + \zeta}$ & $\frac{\Pi z}{a + \zeta}$; & les trois forces accélératrices $\frac{2g\Pi x}{M(a + \zeta)}$, $\frac{2g\Pi y}{M(a + \zeta)}$, $\frac{2g\Pi z}{M(a + \zeta)}$; l'une pour la direction parallèle aux x, la seconde pour la direction parallèle aux y, & la troisiéme pour la direction parallèle aux z. Mais comme toutes ces forces tendent à diminuer les coordonnées respectives, ces forces accélératrices seront, en remettant pour Π sa valeur $\frac{P\zeta}{\theta}$, I. $- \frac{2gP\zeta x}{M\theta(a + \zeta)}$, II. $- \frac{2gP\zeta y}{M\theta(a + \zeta)}$, III. $- \frac{2gP\zeta z}{M\theta(a + \zeta)}$.

§. 4. Pour trouver la direction des forces, qui naissent de la décomposition de V, on fera attention, que la force centrifuge agit toûjours dans la direction du rayon osculateur, & chaque force qui en résulte pour chaque axe, sera $=$ V multiplié par le cosinus de l'angle formé par cet axe avec le rayon osculateur. Or par le §. 18. de la Dissertation citée de M. Euler, ce rayon fait avec l'axe des x un angle, dont le cosinus $= \frac{\partial p}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$, avec celui des y un angle, dont le cosinus $= \frac{-\partial q}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$, & avec celui des z un angle, dont le cosinus $= \frac{\partial r}{\sqrt{(\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2)}}$; dans lesquelles formules p est $= \frac{\partial x}{\partial s}$, $q = \frac{\partial y}{\partial s}$, & $r = \frac{\partial z}{\partial s}$. Donc on a

$$\partial p = \frac{\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s}{\partial s^2};$$

$$\partial q = \frac{\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s}{\partial s^2}; \ \&$$

$$\partial r = \frac{\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s}{\partial s^2}:$$

car à cause de ∂t prise constante, il n'est pas permis de supposer telle quelque autre variable. Delà, puisque

∂s

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2, \ \&$$
$$\partial s \partial \partial s = \partial x \partial \partial x + \partial y \partial \partial y + \partial z \partial \partial z,$$

on aura

le 1er cosinus $= \frac{\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

le 2^e cosinus $= \frac{-(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

le 3^e cosinus $= \frac{\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s}{\partial s \sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$.

§. 5. Quant aux ſignes, qu'il faudra mettre devant ces nouvelles forces, ils ſeront affirmatifs pour les coſinus négatifs, & négatifs pour les coſinus affirmatifs. Nos trois forces ſeront donc, en ſubſtituant pour V ſa valeur $\frac{M \partial s^2}{R \partial t^2}$, & pour R la ſienne $= \frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial \partial x^2 + \partial \partial y^2 + \partial \partial z^2 - \partial \partial s^2)}}$,

I. $= \frac{-M(\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$;

II. $= \frac{M(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$;

III. $= \frac{-M(\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$,

& chacune de ces forces étant diviſée par M, donnera la force accélératrice reſpective.

§. 6. En ramaſſant donc maintenant les forces trouvées pour la direction de chaque axe des variables x, y, z, on aura ces trois équations fondamentales :

(A) $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = 2g - \frac{2gP\zeta x}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial x - \partial x \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

(B) $\frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = \quad - \frac{2gP\zeta y}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial y - \partial y \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

(C) $\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} = \quad - \frac{2gP\zeta z}{M\theta(a+\zeta)} - \frac{(\partial s \partial \partial z - \partial z \partial \partial s)}{\partial s \partial t^2}$.

§. 7. Il feroit ſans doute impoſſible de rien conclure de ces équations, bien loin de pouvoir les intégrer. Il faudra

dra donc maintenant au lieu des variables x, y, z, en introduire d'autres, qui ſoyent plus propres à nous donner une idée du mouvement en quéſtion, & qui, d'après les ſuppoſitions & les reſtrictions que nous faiſons, ſimplifieront les équations, & nous meneront peut-être à leur intégration, en nous indiquant les termes, qu'on pourra négliger comme infinimentpetits.

§. 8. La prémiére de ces variables ſera le rayon vecteur $a + \zeta$ lui-même, que nous ſavons déja être

$$= \sqrt{(xx + yy + zz)}.$$

Qu'on ſe répréſente enſuite un cercle vertical, dont le rayon $= 1$, ayant le point A pour centre, & paſſant par le rayon vecteur A N. Qu'on nomme l'arc de ce cercle, compris entre la verticale A B & le rayon A N $= \Phi$, on aura

$$x = (a + \zeta) \operatorname{cof.} \Phi.$$

Qu'on ſe répréſente encore un ſecond cercle, dont le rayon $= 1$, perpendiculaire à la verticale A B, & dont le plan paſſe par le point N. Que l'arc de ce cercle, compris entre le point N & l'ordonnée P M prolongée, ſoit $= \omega$: on aura, (puisqne P N $= yy + zz = (a + \zeta) \operatorname{fin.} \Phi$),

$$y = (a + \zeta) \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \omega, \text{ \&}$$
$$z = (a + \zeta) \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{fin.} \omega.$$

§. 9. En réfléchiſſant un peu ſur la nature de notre courbe, il eſt clair, que ſi le fil ne ſouffroit point d'extenſion, le corps décriroit en montant & en baiſſant alternativement une eſpèce de ſpirale, & il eſt probable, que la détermination de cette courbe ſurpaſſeroit dèja toutes les forces de l'Analyſe. L'entrepriſe ſeroit donc à raiſon d'autant plus forte inutile, en faiſant entrer les extenſions du fil dans le calcul.

Je ſerai donc obligé de ſuppoſer, que le corps ait déja l'élévation requiſe, c'eſt à dire que l'angle B A C ſoit tel qu'il reſteroit conſtamment, ſi le fil ne ſouffroit point d'extenſion, auquel cas le corps ſe borneroit à décrire toujours le même cercle. Le fil venant enſuite à s'étendre & à ſe reſſerrer alternativement, le cercle ſe changera en une autre courbe à double courbure; l'angle B A C ne reſtera pas non plus parfaitement conſtant, mais comme les extenſions du fil ſont ſuppoſées infiniment-petites, il paroit naturel de croire, que les variations de cet angle doivent l'être auſſi. Je m'arrêterai donc encore à cette ſuppoſition, que l'angle Φ ne puiſſe différer & varier qu'infiniment-peu d'un angle conſtant, que j'appellerai $= \delta$, & en faiſant $\Phi = \delta + \psi$, ψ ſera un angle variable infiniment-petit, affirmatif ou négatif.

§. 10. On aura donc

$$x = (a + \zeta) \operatorname{cof.} (\delta + \psi).$$
$$y = (a + \zeta) \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{cof.} \omega.$$
$$z = (a + \zeta) \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{fin.} \omega.$$

Delà on tire

$$\partial x = \partial \zeta \operatorname{cof.} (\delta + \psi) - (a + \zeta) \partial \psi \operatorname{fin.} (\delta + \psi).$$
$$\partial y = \partial \zeta \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{cof.} \omega + (a + \zeta) \partial \psi \operatorname{cof.} (\delta + \psi) \operatorname{cof.} \omega - (a + \zeta) \partial \omega \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{fin.} \omega.$$
$$\partial z = \partial \zeta \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{fin.} \omega + (a + \zeta) \partial \psi \operatorname{cof.} (\delta + \psi) \operatorname{fin.} \omega + (a + \zeta) \partial \omega \operatorname{fin.} (\delta + \psi) \operatorname{cof.} \omega.$$

On aura de même

$$\partial \partial x = \partial \partial \zeta \operatorname{cof.} (\delta + \psi) - 2 \partial \zeta \partial \psi \operatorname{fin.} (\delta + \psi) - (a + \zeta) \partial \partial \psi \operatorname{fin.} (\partial + \psi) - (a + \zeta) \partial \psi^2 \operatorname{cof.} (\delta + \psi).$$

$\partial \partial y$

$$\partial\partial y = \partial\partial\zeta \sin.(\delta+\psi)\cos.\omega + 2\delta\zeta\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$- 2\partial\zeta\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\psi^2\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$+ (a+\zeta)\partial\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega - (a+\zeta)\partial\omega^2\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega$$
$$- 2(a+\zeta)\partial\psi\partial\omega\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega.$$

$$\partial\partial z = \partial\partial\zeta \sin.(\delta+\psi)\sin.\omega + 2\delta\zeta\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ 2\partial\zeta\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega - (a+\zeta)\partial\psi^2\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ (a+\zeta)\partial\partial\psi\cos.(\delta+\psi)\sin.\omega - (a+\zeta)\partial\omega^2\sin.(\delta+\psi)\sin.\omega$$
$$+ 2(a+\zeta)\partial\psi\partial\omega\cos.(\delta+\psi)\cos.\omega + (a+\zeta)\partial\partial\omega\sin.(\delta+\psi)\cos.\omega.$$

§. 11. Ces derniéres formules étant extrémement compliquées, il eſt tems enfin de voir, quels ſont les termes, qu'on peut négliger dans chacune. Je remarque donc, qu'on peut d'abord négliger le ζ & le ψ dans tous les termes, affectés de $a+\zeta$ & de $\delta+\psi$, quoiqu'on n'ait pas oſé le faire avant la différentiation, dans laquelle autrement on auroit perdu bien des termes très eſſentiels. Enſuite une lecture réïtérée & attentive des §§. 5. 6. 12. 13 & 14. de mon prémier Mémoire convaincra, ſans que j'aye beſoin d'entrer dans de longues diſcuſſions pour en faire l'application à notre préſent cas, que $\partial\zeta$ & $\partial\psi$ ſont à $\partial\omega$ comme $1 : \sqrt{\infty}$, mais qu'au contraire $\partial\partial\zeta$ & $\partial\partial\psi$ ſont à $\partial\omega^2$ dans un rapport fini (*). Ainſi dans les expreſſions de ∂y & ∂z on pourra omettre tous

(*) Je croyois être le premier, qui eut découvert la vérité de cette propoſition, qui d'abord m'a paru aſſes paradoxe, que deux variables x & y, & leurs premiéres différences ∂x & ∂y étant dans un rapport infiniment-petit, $\partial\partial x$ & ∂y^2 pouvoient être dans un rapport fini: mais j'ai vu, depuis que les deux premiers Mémoires ſur cette matiére ont été imprimés, que M. Euler le Père a traité cette propoſition comme déja connue, dans divers Mémoires, & entre autres, dans celui qui a pour titre *De collisione corporum gyrantium*, inſéré dans le Tom. XVII. de nos Nouveaux Commentaires.

tous les termes affectés de $\partial \zeta$ & $\partial \psi$, & ne garder que ceux affectés de $\partial \omega$. Mais dans les expressions de $\partial \partial x$, $\partial \partial y$ & $\partial \partial z$, il faudra outre les termes affectés de $\partial \omega^2$ & de $\partial \partial \omega$, garder encore ceux affectés de $\partial \partial \zeta$ & $\partial \partial \psi$. D'après tout ceci on aura donc les équations suivantes simplifiées:

$$x = a \operatorname{cos}. \delta;$$
$$y = a \operatorname{sin}. \delta \operatorname{cos}. \omega;$$
$$z = a \operatorname{sin}. \delta \operatorname{sin}. \omega$$

$$\partial x = \partial \zeta \operatorname{cos}. \delta - a \partial \psi \operatorname{sin}. \delta;$$
$$\partial y = - a \partial \omega \operatorname{sin}. \delta \operatorname{sin}. \omega;$$
$$\partial z = a \partial \omega \operatorname{sin}. \delta \operatorname{cos}. \omega.$$

$$\partial \partial x = \partial \partial \zeta \operatorname{cos}. \delta - a \partial \partial \psi \operatorname{sin}. \delta.$$
$$\partial \partial y = \partial \partial \zeta \operatorname{sin}. \delta \operatorname{cos}. \omega + a \partial \partial \psi \operatorname{cos}. \delta \operatorname{cos}. \omega - a \partial \omega^2 \operatorname{sin}. \delta \operatorname{cos}. \omega - a \partial \partial \omega \operatorname{sin}. \delta \operatorname{sin}. \omega.$$
$$\partial \partial z = \partial \partial \zeta \operatorname{sin}. \delta \operatorname{sin}. \omega + a \partial \partial \psi \operatorname{cos}. \delta \operatorname{sin}. \omega - a \partial \omega^2 \operatorname{sin}. \delta \operatorname{sin}. \omega + a \partial \partial \omega \operatorname{sin}. \delta \operatorname{cos}. \omega.$$

§. 12. Il faut encore chercher le ∂s & le $\partial \partial s$. Or on a $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$; & puisque ∂x, à ce que l'on voit, est dans un rapport infiniment-petit à ∂y & ∂z, on pourra le négliger, & on aura

$$\partial s^2 = \partial y^2 + \partial z^2 = a^2 \partial \omega^2 \operatorname{sin}. \delta^2, \text{ et } \partial s = a \partial \omega \operatorname{sin}. \delta.$$

Mais comme cette valeur n'a été trouvée qu'en négligeant plusieurs termes infiniment-petits, on en concluroit faussement, que $\partial \partial s = a \partial \partial \omega \operatorname{sin}. \delta$; mais il faut avoir recours à l'equation $\partial s \partial \partial s = \partial x \partial \partial x + \partial y \partial \partial y + \partial z \partial \partial z$, où l'on peut pourtant négliger le terme $\partial x \partial \partial x$, ensorte qu'on aura

$$\partial \partial s = \frac{\partial y \partial \partial y + \partial z \partial \partial z}{\partial s}. \text{ Or}$$

$\partial y \partial \partial y$

$$\partial y \partial \partial y = - a \partial \omega \partial \partial \zeta \text{ fin. } \delta^2 \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega$$
$$- a a \partial \omega \partial \partial \psi \text{ fin. } \delta \text{ cof. } \delta \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega$$
$$+ a a \partial \omega^3 \text{ fin. } \delta^2 \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega + a a \partial \omega \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta^2 \text{ fin. } \omega^2;$$

$$\partial z \partial \partial z = + a \partial \omega \partial \partial \zeta \text{ fin. } \delta^2 \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega$$
$$+ a a \partial \omega \partial \partial \psi \text{ fin. } \delta \text{ cof. } \delta \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega$$
$$- a a \partial \omega^3 \text{ fin. } \delta^2 \text{ fin. } \omega \text{ cof. } \omega - a a \partial \omega \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta^2 \text{ cof. } \omega^2:$$

ce qui donne

$$\partial \partial s = \frac{a a \partial \omega \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta^2 (\text{fin. } \omega^2 - \text{cof. } \omega^2)}{a \partial \omega \text{ fin. } \delta}$$
$$= a \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta (\text{fin. } \omega^2 - \text{cof. } \omega^2).$$

§. 13. Reprenons donc enfin nos équations fondamentales, qu'on peut réduire à ces formes:

$$(A) \quad \frac{2 g P \zeta x}{M \theta a} = 2 g - \frac{2 \partial \partial x}{\partial t^2} + \frac{\partial x \partial \partial s}{\partial s \partial t^2};$$
$$(B) \quad \frac{2 g P \zeta y}{M \theta a} = \frac{-2 \partial \partial y}{\partial t^2} + \frac{\partial y \partial \partial s}{\partial s \partial t^2};$$
$$(C) \quad \frac{2 g P \zeta z}{M \theta a} = \frac{-2 \partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{\partial z \partial \partial s}{\partial s \partial t^2};$$

& fubftituons y les valeurs trouvées pour x, y, z, & pour leur différentielles, on aura:

$$(C) \quad \frac{2 g P \zeta \text{ cof. } \delta}{M \theta} = 2 g - \frac{2 (\partial \partial \zeta \text{ cof. } \delta - a \partial \partial \psi \text{ fin. } \delta)}{\partial t^2};$$

$$\left[\text{le terme } \frac{\partial x \partial \partial s}{\partial s \partial t^2} \text{ peut être rejetté} \right].$$

$$(D) \quad \frac{2 g P \zeta \text{ fin. } \delta \text{ cof. } \omega}{M \theta} = - \frac{2 (\partial^2 \zeta \text{ fin. } \delta \text{ cof. } \omega + a \partial^2 \psi \text{ cof. } \delta \text{ cof } \omega - a \partial \omega^2 \text{ f. c. } \delta \omega - a \partial^2 \omega \text{ f. } \delta \text{ f. } \omega)}{\partial t^2}$$
$$- \frac{a \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta \text{ fin. } \omega (\text{fin. } \omega^2 - \text{cof. } \omega^2)}{\partial t^2}.$$

$$(E) \quad \frac{2 g P \zeta \text{ fin. } \delta \text{ fin. } \omega}{M \theta} = - \frac{2 (\partial^2 \zeta \text{ fin. } \delta \text{ fin. } \omega + a \partial^2 \psi \text{ cof. } \delta \text{ fin. } \omega - a \partial \omega^2 \text{ f. } \delta \text{ f. } \omega + a \partial^2 \omega \text{ f. } \delta \text{ c. } \omega)}{\partial t^2}$$
$$+ \frac{a \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta \text{ cof. } \omega (\text{fin. } \omega^2 - \text{cof. } \omega^2)}{\partial t^2}.$$

§. 14. Qu'on prenne $(D) \times \text{fin. } \omega - (E) \text{ cof. } \omega$, on trouvera $0 = a \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta - a \partial \partial \omega \text{ fin. } \delta (\text{fin. } \omega^2 - \text{cof. } \omega^2)$, donc

 auffi

aussi $\partial\partial\omega$, & par-conséquent $\partial\partial s = 0$, & la vitesse turbinatoire $\frac{\partial s}{\partial t}$ doit être regardée comme constante; ce qu'on pouvoit d'ailleurs avec fondement présumer d'avance.

§. 15. Les équations (D) & (E) sont donc identiques, & ne tiennent lieu que d'une seule: en échange nous avons gagné cette autre équation:

(F) $\partial t = m\,\partial\omega$,

où m répresente une constante, que nous déterminerons dans la suite.

§. 16. Prenons donc maintenant (C) $\times \frac{1}{2}$ cos. δ + (D) $\times \frac{\sin.\delta}{2\,\mathrm{co}.\,\omega}$, en effaçant les termes affectés de $\partial\partial\omega$, & substituant $m\,\partial\omega$ pour ∂t, on a:

$$\frac{g\,P\,\zeta}{M\,\theta} = g \cos.\delta - \frac{\partial\partial\zeta}{m\,m\,\partial\omega^2} + \frac{a \sin.\delta^2}{m\,m}:$$

delà en multipliant par $\partial\zeta$, & intégrant:

$$\frac{g\,P\,\zeta\zeta}{2\,M\,\theta} = A + g\,\zeta \cos.\delta - \frac{\partial\zeta^2}{2\,m\,m\,\partial\omega^2} + \frac{a\,\zeta \sin.\delta^2}{m\,m}: \text{ delà}$$

$$\partial\omega = \frac{\partial\zeta : m\sqrt{2A}}{\sqrt{1 + \left(\frac{g \cos.\delta}{A} + \frac{a \sin.\delta^2}{m\,m\,A}\right)\zeta - \frac{g\,P\,\zeta\zeta}{2\,M\,\theta\,A}}} = \frac{\partial\zeta : m\sqrt{2A}}{\sqrt{1 + \alpha\zeta - \beta\zeta\zeta}},$$

en faisant $\frac{g \cos.\delta}{A} + \frac{a \sin.\delta^2}{m\,m\,A} = \alpha$, & $\frac{g\,P}{2\,M\,\theta\,A} = \beta$. En intégrant de nouveau, on trouve.

$$\omega = \frac{1}{m\sqrt{2\,A\,\beta}} \times A.\cos.\frac{\alpha - 2\beta\zeta}{\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}} + B,$$

(voyez *Eul. Calc. Integr. T. I.* §. 91.), donc

$$\frac{\alpha - 2\beta\zeta}{\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}} = \cos.\, m\,(\omega - B)\sqrt{2\,A\,\beta}, \ \&$$

$$\text{I. } \zeta = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2\beta} \times \cos.\, m\,(\omega - B)\sqrt{2\,A\,\beta}.$$

§. 17. En différentiant cette valeur de ζ, on aura

$$\partial \zeta = m \sqrt{\frac{\alpha\alpha A + 4\beta A}{2\beta}} \times \partial\omega \times \text{fin.}\, m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}, \;\&$$

$$\partial\partial\zeta = - mmA\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} \times \partial\omega^2 \times \text{cof.}\, m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}.$$

Subftituant les valeurs de ζ & $d\partial\zeta$ dans l'équation (D), elle deviendra:

$$\frac{g\,p\,\text{fin.}\,\delta}{M\,\theta} \times m^2\partial\omega^2 \times \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{g\,p\,\text{fin.}\,\delta}{M\,\theta} \times m^2\partial\omega^2 \times \frac{\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{2\beta} \times \text{cof.}\, m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}$$
$$= m^2 A\,\text{fin.}\,\delta\sqrt{(\alpha^2+4\beta)} \times \partial\omega^2 \times \text{cof.}\, m(\omega - B)\sqrt{2A\beta} - a\partial\partial\psi\,\text{cof.}\,\delta + a\partial\omega^2\,\text{fin.}\,\delta.$$

Intégrant deux fois, & débarraffant le ψ, on trouvera la feconde des deux équations finales, qui doivent contenir le réfultat de nos recherches:

$$\text{II.}\; a\psi\,\text{cof.}\,\delta = \left(\frac{\text{fin.}\,\delta \times \sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{2\beta} - \frac{g\,p\,\text{fin.}\,\delta\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}}{4M\,\theta\,\beta\,\beta\,A}\right)\text{cof.}\, m\,(\omega - B)\sqrt{2\beta A}$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2}\, a\,\text{fin.}\,\delta - \frac{g\,p\,m^2\,\alpha\,\text{fin.}\,\delta}{4M\,\theta\,\beta}\,\omega\,\omega\right) + C\,\omega + D.$$

§. 18. Il faudra maintenant chercher la valeur de m, & la fubftituer avec les valeurs de α & β dans nos équations. Or fi l'on a un pendule A C de la longueur a, décrivant en turbinant un cone, dont l'angle formé par l'axe A B & le coté A C $= \delta$, on aura B C $= a$ fin. δ; & nommant encore ω les angles décrits autour de B, la viteffe du corps en C fera $= \frac{a\,\partial\omega\,\text{fin.}\,\delta}{\partial t} = \frac{a\,\text{fin.}\,\delta}{m}$, & la force centrifuge du corps fera Tab. III. Fig. 7.

$$= \left(\frac{a\,\text{fin.}\,\delta}{m}\right)^2 : a\,\text{fin.}\,\delta = \frac{a\,\text{fin.}\,\delta}{m^2}.$$

De même la gravité du corps étant exprimée par la verticale CD $= 2g$, que cette force foit réfolue en CF & CE, dont celle-ci ne tend qu'à allonger le fil, & dont celle-là eft oppofée à la force centrifuge, on aura C F $= 2g$ tang. δ; il faudra donc, que $2g$ tang. $\delta = \frac{a\,\text{fin.}\,\delta}{m\,m}$, ce qui donne

$$m = \sqrt{\frac{a\,\text{cof.}\,\delta}{2g}}.$$

Après les fubftitutions faites nos équations fe changeront en celles-

celles-ci :

$$\text{I. } \zeta = \frac{M\theta(\frac{1}{2}\operatorname{cos}.\delta^2 + \operatorname{sin}.\delta^2)}{P \operatorname{cos}.\delta} - \frac{M\theta}{P}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\operatorname{sin}.\delta^2 + \operatorname{cos}.\delta^4}{\operatorname{cos}.\delta^2} + \frac{2PA}{gM\theta}} \times$$

$$\operatorname{cos}.(\omega - B)\sqrt{\frac{P\,a\operatorname{cos}.\delta}{2M\theta}}.$$

$$\text{II. } a\,\psi\operatorname{cos}.\delta = \frac{M\theta\operatorname{sin}.\delta}{P}\sqrt{\frac{4\operatorname{sin}.\delta^2 + \operatorname{cos}.\delta^4}{\operatorname{cos}.\delta^2} + \frac{2PA}{gM\theta}} \times 0$$

$$+ (\tfrac{1}{2}a\operatorname{sin}.\delta - \tfrac{1}{4}a\operatorname{sin}.\delta\operatorname{cos}.\delta^2 - \tfrac{1}{2}a\operatorname{sin}.\delta^3)\,\omega\omega + C\omega + D$$

$$= \tfrac{1}{4}a\operatorname{cos}.\delta^2 \times \omega\omega + C\omega + D.$$

§. 19. En examinant ces deux équations de plus près, on voit que la prémiére répond parfaitement à l'espèce de mouvement, que nous avons supposé au corps, & qu'elle est fort propre à répresenter les extensions & resserremens alternatifs du fil, puisqu'ils se font encore, à ce qu'elle indique, suivant un mouvement cycloïdal, ce que nous avons vu déja avoir lieu dans nos précédens Mémoires. Les constantes A & B se détermineront faicilement par les circonstances supposées connues de l'extension du fil, & de sa vitesse extensive ou resserrante, au moment que le mouvement turbinatoire a commencé.

§. 20. Mais si la prémiére équation satisfait si bien, c'est tout le contraire quant à la seconde, qui ne fait rien de moins que renverser tous nos calculs & l'hypothèse principale, sur laquelle ils reposent, savoir que l'angle δ n'est susceptible que d'accroissemens ou de diminutions infiniment-petites ψ. En effet l'équation donne à entendre, que l'angle ψ augmente à l'infini, ce qui est non seulement contraire à l'hypothèse, mais absurde.

§. 21.

§. 21. Il faut donc néceſſairement l'une de ces deux choſes: 1o. ou bien les calculs ſont juſtes, & l'hypothèſe dont je viens de parler, & qui leur ſert de baſe, manque de fondement; ce qui veut dire, qu'il n'eſt pas poſſible, qu'en ſuppoſant une extenſibilité tant ſoit peu petite au fil, il puiſſe en turbinant garder avec l'axe un angle à-peu-près conſtant, & ne faire que de petites nutations: quoique cette hypothèſe paroiſſe ſi naturelle, qu'on a de la peine à y renoncer, & qu'on eſt plutôt porté à ſoupçonner le calcul dans le tort. 2°. ou bien l'hypothèſe eſt légitime & vraye, & j'ai commis quelque faute dans le calcul, ou quelque paralogisme en rejettant des termes, que je croyois pouvoir négliger. J'avouérai même quant à ce dernier point, qu'ayant mis la plus grande attention à paſſer, s'il m'eſt permis de m'énoncer ainſi, mes termes au crible, & à faire une application juſte des principes établis & démontrés dans les précédens Mémoires, je ne puis cependant, vu la grande délicateſſe de la matière, me raſſurer entiérement de n'avoir pas choppé dans quelque endroit, qui peut avoir influé ſur tout le reſte. Il faut au reſte bien ſe garder de conclure, de ce que l'équation II. eſt abſurde, que le calcul ſoit erroneux. Car ſi l'hypothèſe étoit fauſſe, comme à tout prendre cela n'eſt pas abſolument impoſſible, il ne ſeroit pas étonnant, & l'on devroit au contraire s'y attendre, qu'elle menat enfin à quelque réſultat abſurde. Au reſte je je n'ai pas beſoin d'avertir, que ſi l'équation II. étoit bonne, les conſtantes C & D indiqueroient, l'une la viteſſe nutatoire initiale, & l'autre l'angle ψ initial du corps en mouvement.

RACCOURCI
DES ELEMENS DIOPTRIQUES,
QUI SERVENT DE BASE À LA THEORIE DES OBJECTIFS ACHROMATIQUES APPLICABLES AUX MICROSCOPES.

Par

W. L. KRAFFT.

Lu à l'Académie le 17 Mars 1788.

Je me propose dans ce Memoire, de reduire à des principes généraux & de presenter dans leur rapprochement les *elemens* dioptriques, qui servent de base à la Theorie des objectifs achromatiques applicables aux *Microscopes*. M. Euler, dans le Tome XVIII. des Nouveaux Commentaires de l'Academie, a donné comme un Supplement à son grand ouvrage dioptrique, un Memoire sur l'application des objectifs achromatiques à toute sorte de *Telescopes*. Le procedé extremement ingenieux qu'il y suit pour simplifier le calcul, ne scauroit etre appliqué immediatement aux Microscopes, vuque les elemens, dont il part, sont adaptés à l'hypothese d'un objet *infiniment éloigné*. J'ai donc cru, qu'il ne seroit pas sans interet, de presenter ces elemens sous une forme, qui les rendit propres à etre appliqués aux Microscopes, d'autant plus, que le rapprochement de ces elemens m'a fourni des moyens de simplifier en quelques points

points la maniere de les demontrer & que la Theorie, à la quelle ils doivent servir de base, en pourra fournir d'autres de perfectionner davantage les nouveaux Microscopes de M. Aepinus, que cet illustre sçavant, meme en y employant des objectifs achromatiques des *Telescopes*, a deja portés à un haut point de perfection.

Elemens généraux.

1.) Que la demi-lentille spherique de verre APQB ait pour les rayons de courbure de ses deux surfaces les lignes $CM = f$ & $DN = g$ & consequemment pour son axe & son epaisseur la ligne $AB = e$. Soit l'angle de l'ouverture de la premiere surface $ACM = u$ & le demidiametre de cette ouverture $MK = x = f \text{ sin. } u$, ensorte que $AK = 2f. \overline{\text{sin. } \tfrac{1}{2} u}^2$. Supposons dans l'axe à la distance $AL = y$ devant la lentille, le point lumineux L, dont le rayon LM partant de l'axe sous l'angle $ALM = \omega$ & passant par l'extremité de l'ouverture, soit refracté au point M de la premiere surface refringente, selon MN; & au point N de la seconde surface refringente, selon NV. Il s'agit de determiner l'inclinaison du rayon refracté NV à l'axe, & la distance de ce point d'intersection V à la lentille, ou l'angle $NVB = \Omega$ & la distance $BV = Y$. Tab. IV. Fig. 1.

2.) Designons pour cet effet l'angle de la premiere incidence LMc par i & celui de la premiere refraction CMN par r. En mettant pour abreger $\frac{f+y}{f} = \lambda$, on aura par les Δ LMK & LMC

$$\text{tang. } \omega = \frac{\text{sin. } u}{\lambda - \text{cos. } u} \;\&\; \text{sin. } i = \lambda. \text{ sin. } \omega = \frac{\lambda. \text{sin. } u}{\sqrt{(1 + \lambda^2 - 2\lambda \text{ cos. } u)}}.$$

Donc si la rapport $n : 1$ designe la loi de la refraction pour un rayon de moyenne refrangibilité passant d'air en verre d'espece donnée, on aura

sin. $r =$

$$\text{fin. } r = \frac{\lambda \text{ fin. } \omega}{n} = \frac{\lambda. \text{ fin. } u}{n \sqrt{(1 + \lambda^2 - 2 \lambda \text{ cof. } u)}}.$$

Connoiffant par là l'angle M O A $= \psi = u - r$ fous le quel le prolongement N O du rayon refracté M N eft incliné à l'axe de la lentille après la premiere refraction, on aura K O $= \frac{x}{\text{tang.} \psi}$ d'où l'on trouve la diftance du point d'interfection de ce rayon avec l'axe à la premiere furface refringente, ou

$$A O = 2 f. \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} u}^2 + f. \text{ fin. } u. \text{ cotang. } \psi.$$

Mettant cette diftance A O $=$ K; pour connoitre l'angle de la feconde incidence M N D $= \eta$ & celui de la feconde refraction V N $d = \varrho$, on aura dans le Δ D N O,

$$\text{fin. } \eta = \frac{K + g - e}{g}. \text{ fin. } \psi$$

& confequemment

$$\text{fin. } \varrho = \frac{n(K + g - e)}{g}. \text{ fin. } \psi.$$

Or connoiffant ces angles, on a $\Omega = \varrho - \eta + \psi$ & comme l'ouverture B D N $= v = \eta - \psi$, que doit avoir la feconde furface refringente, a pour fon demidiametre N R $= g. \text{ fin. } v$, enforte que

$$B R = 2 g. \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2 \ \& \ N R = R V. \text{ tang. } \Omega;$$

on aura

$$g. \text{ fin. } v = (Y + 2 g. \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2). \text{ tang. } \Omega;$$

d'ou l'on tire

$$Y = g. \text{ fin. } v. \text{ cotang. } \Omega - 2 g. \overline{\text{fin. } \tfrac{1}{2} v}^2.$$

3.) Quoique ces formules n'embraffent proprement, que les rayons partant d'un *point lumineux de l'axe meme* de la lentille: elles s'appliquent cependant avec la meme précifion & facilité aux rayons, qui partent *d'un point quelconque d'un objet* placé fur l'axe à une diftance donnée de la lentille.

Car

Car ſoit la verticale $E\varepsilon = z$ le demidiametre d'un tel objet, ſa diſtance à la lentille $AE = a$, & e un point quelconque, dont la hauteur au deſſus de l'axe, $Ee = t$. Le rayon eM tombant ſur la lentille, comme s'il venoit du point L de l'axe meme; on n'a, qu'à ſuppoſer dans les formules precedentes

$$y = a + \frac{E.K.t}{x-t} = \frac{ax + A.K.t}{x-t};$$

enſorte, que

$$y = \frac{ax + 2ft.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u}{x-t} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{(a+f)x - ft.\,\text{coſ.}\,u}{f(x-t)}.$$

Application des formules précédentes aux rayons infiniment proches de l'axe de la lentille.

1.) Pour appliquer les formules précédentes à la determination de la route des rayons infiniment proches de l'axe de la lentille, on n'a, qu'à ſuppoſer à la premiere ſurface refringente une ouverture infiniment petite; & conſequemment à faire ſin. $u = u$ & coſ. $u = 1$; moyennant quoi on a

$$y = \frac{ax}{x-t} \quad \& \quad \lambda = \frac{(a+f)x - ft}{f(x-t)}.$$

Or ces valeurs donnent

$$K = \frac{n(\lambda - 1)f}{n(\lambda - 1) - \lambda} = \frac{nf.y}{(n-1)y - f};$$

$$\Omega = \frac{(n-1)(K-e) + ng}{K} \cdot \frac{f}{g} \cdot u \quad \&$$

$$Y = \frac{(K-e)g}{(n-1)(K-e) + ng};$$

enſorte, qu'en ſeparant les termes affectés de l'epaiſſeur de le lentille, on a

$$\Omega = \left[\frac{(n-1)K + ng}{K} - (n-1) \cdot \frac{e}{K}\right] \cdot \frac{f}{g} \cdot u \quad \&$$

$$Y = \frac{g.K}{(n-1)K + ng}\left[1 - \frac{ng}{(n-1)(K-e) + ng} \cdot \frac{e}{K}\right].$$

 2.)

2.) La distance K étant arbitraire, vu qu'il est indifférent, quelle que soit la distance du point d'interſection du rayon M N avec l'axe après la *ſeule premiere refraction*; on la prendra toujours ſi grande, que la valeur $\frac{e}{K}$ ſoit aſſés petite pour qu'on puiſſe negliger les termes, qui ſont affectès de ce coëfficiant, ainſi que l'epaiſſeur de la lentille; moyennant quoi & en ſubſtituant la valeur de K on aura

$$\Omega = \frac{(n-1)(f+g)y - fg}{g \cdot y} \cdot u \text{ \&}$$

$$Y = \frac{f g \cdot y}{(n-1)(f+g)y - fg}.$$

Pour abreger ces expreſſions, on remarque, que pour le cas $y = \infty$, Y devient la diſtance du foyer de la lentille $= p$ $= \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$; on aura donc en ſubſtituant cette valeur

$$\Omega = \frac{y-p}{p \cdot y} f . u \text{ \& } Y = \frac{p \cdot y}{y-p} = \frac{f . u}{\Omega}.$$

3.) Pour determiner par ces formules la poſition & le demidiametre de l'image de l'objet formée derriere la lentille, on n'a, qu'à les appliquer aux rayons, qui partent du *centre de l'objet*, & à ceux, qui partent de *ſon extremité*. Or

Fig. 2. pour un rayon comme E M partant du centre de l'objet, on a $t = o$ & conſequemment $y = a$; donc

$$\Omega = MFA = \frac{a-p}{ap} f . u \text{ \& } Y = AF = \frac{ap}{a-p},$$

& comme le rayon E A partant du centre de l'objet dans la direction de l'axe meme de la lentille, y paſſe ſans etre refracté; le point d'interſection F ſera l'image formée par des rayons infiniment proches de l'axe ou l'image *principale* du point E, de la quelle la diſtance à la lentille etant deſignée par α, on a

$$\alpha = AF = \frac{ap}{a-p} \text{ \& } \Omega = MFA = \frac{f}{\alpha} . u = \frac{x}{\alpha}.$$

Pour un rayon comme e M partant de l'extremité de l'objet, on on a $t = z$ & consequemment $y = \frac{ax}{x-z}$, donc

$$\Omega = \text{M U A} = \frac{(a-p)x+pz}{ap.x}.f.u \;\&$$

$$\text{Y} = \text{A U} = \frac{ap.x}{(a-p)x+pz},$$

ou en mettant l'angle E A $e = \Phi$, ensorte que $z = a.$ tang. Φ on aura

$$\Omega = \frac{x+\alpha\,tang.\Phi}{\alpha} \;\&\; \text{Y} = \frac{\alpha x}{x+\alpha\,tang.\Phi}.$$

Or comme la valeur de K prise comme cy-dessus, nous met en droit de supposer l'epaisseur de la lentille $e = 0$, le rayon e A H tiré par le centre A de la lentille, y passe sans etre refracté & le point d'intersection ζ, où ce rayon est coupé par le prolongement du rayon M U, est l'image principale de l'extremité de l'objet, dont on aura la distance au centre de la lentille

$$\text{A}\zeta = \frac{\text{A U}.fin.\Omega}{fin.(\Omega-\Phi)} = \frac{\text{A U}.tang.\Omega}{cof.\Phi(tang.\Omega - tang.\Phi)}.$$

Or dans cette meme supposition on a aussi

$$x = \text{A U. tang.}\,\Omega = \frac{\alpha x\,tang.\Omega}{x+\alpha.tang.\Phi},$$

ce qui donne tang. Ω — tang. $\Phi = \frac{x}{\alpha}$; donc

$$\text{A}\zeta = \frac{\alpha}{cof.\Phi} \;\&\; \alpha = \text{A}\zeta.\,\text{cof.}\,\Phi = \text{A F}.$$

Le point ζ est donc placé verticalement au dessous du point F, & la perpendiculaire F ζ est l'image principale de l'objet, de la quelle on aura le demidiametre

$$\text{F}\zeta = \text{A}\zeta.\,\text{fin.}\,\Phi = \alpha\,\text{tang.}\,\Phi = \frac{\alpha}{a}.z.$$

4.) Soit maintenant un nombre quelconque de lentilles placées à certaines distances les unes des autres sur un axe commun, & mettons

les

Fig. 3. les distances des foyers	les distances
de la 1 $= p$	de la 1 à la 2 $= AB = D^{I}$
de la 2 $= q$	de la 2 à la 3 $= BC = D^{II}$
de la 3 $= r$	de la 3 à la 4 $= CD = D^{III}$
de la 4 $= s$	

Que devant ces lentilles soit placé sur l'axe un objet lumineux, dont le demidiametre $Ee = z$. Que les rayons de moyenne refrangibilité infiniment proches de l'axe & refractés par les lentilles en partant du centre de l'objet, prennent la route $E\,p\,F\,q\,G\,r\,H\,s$ & que $e\,p\,Q\,R\,S$ soit la route de ceux, qui partent de l'extremité de l'objet, ensorte que les lentilles par chaque refraction representent les images de l'objet, $F\zeta$, $G\eta$, $H\vartheta$, $I\,i$ etc. Mettons de plus

Les demidiametre des ouvertures

de la 1 lent. $Ap = x = R^{I}$
la 2 lent. $BQ = R^{II}$
la 3 lent. $CR = R^{III}$
la 4 lent. $DS = R^{IV}$

Les distances

de l'objectif à la 1 lent. $EA = a$	de la 1 lent. à la 1 imag. $AF = \alpha$
de la 1 imag. à la 2 lent. $FB = b$	de la 2 lent. à la 2 imag. $BG = \beta$
de la 2 imag. à la 3 lent. $GC = c$	de la 3 lent. à la 3 imag. $CH = \gamma$
de la 3 imag. à la 4 lent. $HD = d$	de la 4 lent. à la 4 imag. $DI = \delta$

& les distances entre la

1 & 2 lent. $AB = D^{I} = \alpha + b$
2 & 3 —— $BC = D^{II} = \beta + c$
3 & 4 —— $CD = D^{III} = \gamma + d$.

Cela étant établi: les formules précédentes nous fournissent les 10 suivans elemens dioptriques:

I. *La*

I.) *La distance de chaque image aux deux lentilles, entre les quelles elle se trouve placée.*

Nous avons par ce qui a été demontré cy dessûs

$\alpha = \frac{a\,p}{a - p}$; donc $b = D^{I} - \alpha$

$\beta = \frac{b\,q}{b - q}$; $c = D^{II} - \beta$

$\gamma = \frac{c\,r}{c - r}$; $d = D^{III} - \gamma$

II.) *Les angles, que le rayon passant du centre de l'objet par l'extremité de l'ouverture fait après chaque refraction avec l'axe des lentilles, & les demidiametres des ouvertures dues à la route de ce rayon.*

Car puisque $A\,F\,p = \frac{1}{\alpha}\,x$; on a $B\,q = \frac{b\,.\,x}{\alpha}$

donc $B\,G\,q = .\,\frac{1}{\beta}\,.\,\frac{b\,x}{\alpha}$; $C\,r = \frac{b\,c}{\alpha\,\beta}\,.\,x$

$C\,H\,r = \frac{1}{\gamma}\,.\,\frac{b\,c\,.\,x}{\alpha\,\beta}$; $D\,s = \frac{b\,c\,d}{\alpha\,\beta\,\gamma}\,.\,x.$

III.) *Les demidiametres des images principales.*

Car la premiere image étant l'objet de la 2de lentille & ainsi de suite, & ayant trouvé

$F\,\zeta = \frac{\alpha}{a}\,.\,z = \alpha$ tang. Φ; on aura

$G\,\eta = \frac{\alpha\,\beta}{a\,b}\,.\,z = \frac{\alpha\,\beta}{b}\,.$ tang. Φ;

$H\,\vartheta = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{a\,b\,c}\,.\,z = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{b\,c}\,.$ tang. Φ;

$I\,i = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}{a\,b\,c\,d}\,.\,z = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}{b\,c\,d}\,.$ tang. Φ;

IV. *Les distances, comme* B O, C O′, D O″, *aux quelles le rayon passant de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille, coupe après chaque refraction l'axe des lentilles.*

 Car

Car les points O, O′, O″, étant les foyers des rayons, qui partent comme des points A, O, O′ de l'axe meme; nous avons

$BO = \frac{AB \cdot q}{AB - q}$; donc $GO = \beta - BO = \frac{\alpha \beta q}{b(\alpha + b - q)}$ et $CO = GO + c$.

$CO' = \frac{CO \cdot r}{CO - r}$; $HO' = \gamma - CO' = \frac{GO \cdot \gamma \cdot r}{c(GO + c - r)}$ et $DO' = HO' + d$.

$DO'' = \frac{DO' \cdot s}{DO' - s}$; $IO'' = \delta - DO'' = \frac{HO' \cdot \delta \cdot s}{d(HO' + d - s)}$.

V.) *Les angles, comme B O Q; C O′ R; D O″ S; &c. sous lesquels ce meme rayon coupe après chaque refraction l'axe des lentilles.*

Car ayant

tang. $O = \frac{G\eta}{GO}$; tang. $O' = \frac{H\theta}{HO'}$; tang. $O'' = \frac{Ii}{IO''}$;

& les valeurs reciproques de GO, HO′, IO″, etant par ce, qui precede

$\frac{1}{GO} = \frac{b}{\beta q}\left(1 + \frac{b-q}{\alpha}\right)$; $\frac{1}{HO'} = \frac{c}{\gamma r}\left(1 + \frac{c-r}{GO}\right)$; $\frac{1}{IO''} = \frac{d}{\delta s}\left(1 + \frac{d-s}{HO'}\right)$,

on aura

tang. $O = \frac{(\alpha + b - q)}{q}$. tang. Φ,

tang. $O' + \frac{\alpha \beta}{b \cdot r}$ tang. $\Phi + \frac{(c - r)}{r}$ tang. O,

tang. $O'' = \frac{\alpha \beta \gamma}{b\, c \cdot s}$ tang. $\Phi + \frac{(d - s)}{s}$ tang. O′

VI.) *Les demidiametres des ouvertures, comme BQ, CR, DS, dues aux rayons, qui passent de l'extremité de l'objet par le centre de la premiere lentille.*

Car ayant

$BQ = R^{II} = \frac{AB}{AF} \cdot F\zeta$; $CR = R^{III} = \frac{CO}{GO} \cdot G\eta$; $DS = R^{IV} = \frac{DO'}{HO'} \cdot H\theta$,

en substituant les valeurs trouvées cy dessûs, on aura

$R^{II} = (\alpha + b) \cdot$ tang. Φ,

$R^{III} = \frac{\alpha \beta}{b} \cdot$ tang. $\Phi + c.$ tang. O,

$R^{IV} = \frac{\alpha \beta \gamma}{b c} \cdot$ tang. $\Phi + d.$ tang. O′.

Or

Or pour eliminer de ces formules les angles O, O′, O″ les expreſſions trouvées cy deſſûs nous donnent

$$\text{tang. } O + \text{tang. } \Phi = \frac{\alpha + b}{q} \text{ tang. } \Phi;$$
$$\text{tang. } O' + \text{tang. } O = \frac{\alpha\beta}{b\,r} \text{ tang. } \Phi + \frac{c}{r} \text{ . tang. } O;$$
$$\text{tang. } O'' + \text{tang. } O' = \frac{\alpha\beta\gamma}{b\,c\,.\,s} \text{ tang. } \Phi + \frac{d}{s} \text{ . tang. } O'; \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire

$$\text{tang. } O = \frac{\text{BQ}}{q} - \text{tang. } \Phi,$$
$$\text{tang. } O' = \frac{\text{CR}}{r} - \frac{\text{BQ}}{q} + \text{tang. } \Phi,$$
$$\text{tang. } O'' = \frac{\text{DS}}{s} - \frac{\text{CR}}{r} + \frac{\text{BQ}}{q} - \text{tang. } \Phi,$$

& ſubſtituant ces valeurs, on a

$$R^{\text{II}} = (\alpha + b) \text{ . tang. } \Phi,$$
$$R^{\text{III}} = \frac{c}{q} \text{ . } R^{\text{II}} - c\left(1 - \frac{\alpha\beta}{b\,c}\right) \text{ . tang. } \Phi,$$
$$R^{\text{IV}} = \frac{d}{r} R^{\text{III}} - \frac{d}{q} \text{ . } R^{\text{II}} + d\left(1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{b\,c}\right) \text{ . tang. } \Phi.$$

VII.) *Le demidiametre du Champ apparant.*

Ce demidiametre étant $z = a \text{ . tang. } \Phi$; on obtient par les formules précédentes

pour le nombre des lentilles		ou en eliminant les diſtances des foyers par les distances des images principales
2.	$z = \frac{a}{\alpha + b} \text{ . } R^{\text{II}}$	$z = \frac{a}{\alpha + b} \text{ . } R^{\text{II}}$
3.	$z = \frac{a\,b\,c}{b\,c - \alpha\beta}\left[\frac{R^{\text{II}}}{q} - \frac{R^{\text{III}}}{c}\right]$	$z = \frac{a}{(\beta + c)} \text{ . } \frac{b}{\alpha}\left[R^{\text{III}} - \frac{c}{\beta} R^{\text{II}}\right].$
4.	$z = \frac{a\,b\,c\,d}{b\,c\,d - \alpha\beta\gamma}\left[\frac{R^{\text{II}}}{q} - \frac{R^{\text{III}}}{r} + \frac{R^{\text{IV}}}{d}\right]$	

VIII.) *La juste distance de l'oeil à la derniere lentille, due au champ apparant.*

Afin que l'oeil apperçoive tout le champ apparent, dont le demidiametre vient d'etre determiné; il faut, qu'il soit placé au point O ou O′ ou O″ selon le nombre des lentilles. Or ayant

$$B\,O = \frac{B\,Q}{\text{tang. }O};\quad C\,O^{I} = \frac{C\,R}{\text{tang. }O'};\quad D\,O^{II} = \frac{D\,S}{\text{tang. }O''},$$

en substituant les expressions de ces tangentes trouvées cy dessus, on aura

pour le nombre des lentilles	la distance de l'oeil à la derniere lentille, dûe au champ appar.
2.	$\dfrac{R^{II}}{\dfrac{R^{II}}{q} - \text{tang. }\Phi}$
3.	$\dfrac{R^{III}}{\dfrac{R^{III}}{r} - \dfrac{R^{II}}{q} + \text{tang. }\Phi}$
4.	$\dfrac{R^{IV}}{\dfrac{R^{IV}}{s} - \dfrac{R^{III}}{r} + \dfrac{R^{II}}{q} - \text{tang. }\Phi}$

ou ayant dans tous les Δ comme $B\,O\,Q$ & $G\,O\,\eta$

$$B\,O = \frac{B\,Q\,.\,G\,O}{G\,\eta} = B\,Q\,\frac{(B\,G - B\,O)}{G\,\eta}$$

& consequemment $B\,O = \frac{B\,Q\,.\,B\,G}{B\,Q + G\,\eta}$; on voit, que cette distance de l'oeil se trouve généralement en prenant le produit du demidiametre de l'ouverture de la derniere image à la derniere lentille & en divisant ce produit par la somme des demidiamidiametres de l'ouverture de la derniere lentille & de la derniere image; de façon, qu'on aura

pour le nombre des lentilles	la distance de l'oeil à la derniere lentille, dûe au champ appar.
2.	$\frac{R^{II} \cdot \beta}{R^{II} + \frac{\alpha\beta}{ab} \cdot z}$
3.	$\frac{R^{III} \cdot \gamma}{R^{III} + \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} \cdot z}$
4.	$\frac{R^{IV} \cdot \delta}{R^{IV} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} \cdot z}$

IX.) *Le Grossissement.*

L'oeil placé dans les point O, O′, O″ voit le demidiametre de l'objet sous un angle optique, dont la tangente vient d'etre determinée. Or à une distance arbitraire quelconque $= h$, qu'on pourroit appeller la *distance d'estime*, l'oeil verroit le demidiametre de ce meme objet sous un angle optique, dont la tangente $= \frac{z}{h} = \frac{a}{h} \cdot \text{tang.}\, \Phi$. Designant donc par m^{II}; m^{III}; m^{IV} l'exposant du grossissement par 2, 3, 4 lentilles; on aura

pour le nombre des lentilles	l'exposant du grossissement
2.	$m^{II} = \frac{\alpha + b - q}{q} \cdot \frac{h}{a}$.
3.	$m^{III} = \left[\frac{\alpha\beta}{br} + \frac{(\alpha + b + q)}{q} \frac{(c - r)}{r}\right] \cdot \frac{h}{a}$.
4.	$m^{IV} = \left[\frac{\alpha\beta\gamma}{bc \cdot s} + \frac{(\alpha + b - q)}{q} \frac{(c - r)}{r} \cdot \frac{(d - s)}{s}\right] \cdot \frac{h}{a}$.

Or pour que l'oeil voye *distinctement*, il faut, qu'il reçoive de la derniere lentille des rayons *paralleles* & que consequemment

ment l'image avant-derniere soit au foyer de la derniere lentille; & cette condition, necessaire pour la *distinction* de la vision, nous donne pour 2 lentilles $b = q$; pour 3 lentilles $c = r$; &c. d'où l'on trouve

pour le nombre des lentilles	L'exposant du grossissement
2.	$m^{II} = \frac{\alpha}{q} \cdot \frac{b}{a}$.
3.	$m^{III} = \frac{\alpha\beta}{b \cdot r} \cdot \frac{b}{a}$.
4.	$m^{IV} = \frac{\alpha\beta\gamma}{b\,c \cdot s} \cdot \frac{b}{a}$.

X.) *Le degré de Clarté.*

L'oeil placé dans le points O, O′, O″, &c. reçoit du *centre de l'objet* un cône lumineux, dont la base à l'oeil, a pour demidiametres les perpendiculaires $O\,o$, $O'\,o'$, $O''\,o''$, &c. En designant ces demidiametres respectivement par y^{II}; y^{III}; &c. comme exposans du degré de clarté; on a

$$y^{II} = O\,o = G\,O \cdot \text{tang. } G = G\,O \cdot \frac{B\,q}{B\,G} = \frac{B\,q}{B\,G} \cdot \frac{G\,\eta}{\text{tang. } O}.$$

$$y^{III} = O'\,o' = H\,O' \cdot \text{tang. } H = H\,O' \cdot \frac{C\,r}{C\,H} = \frac{C\,r}{C\,H} \cdot \frac{H\,\vartheta}{\text{tang. } O'}.$$

&c.

Or en substituant les valeurs trouvées cy dessus & supposant pour la distinction de la vision $b = q$; ou $c = r$, ou $d = s$, &c. selon le nombre des lentilles, on trouve

$$y^{II} = \frac{x}{m^{II}} \cdot \frac{b}{a};\ y^{III} = \frac{x}{m^{III}} \cdot \frac{b}{a} \text{ \&c.}$$

ensorte, que les exposans du degré de la clarté sont reciproquement proportionels aux exposans du grossissement. Or le degré de clarté meme étant en raison du nombre des rayons de de lumiere qui composent le cône lumineux, & ce nombre étant en raison du quarré du demidiametre de la base du cône: il s'en suit, que, le demidiametre de la prunelle de l'oeil étant designé par ω, ensorte, qu'il feroit inutile, que y fut plus grand, que ω; la clarté de la vision naturelle à la meme distance sera à celle par l'instrument pour le centre de l'objet comme $\omega^2 : y^2$, & consequemment en prenant la clarté de la vision naturelle à la meme distance pour l'unité, celle par les lentilles sera $\frac{y^2}{\omega^2}$; qui donc sera égale ou inferieure à la clarté de la vision naturelle à la meme distance, selon que $y = \omega$ ou $y < \omega$.

Application des formules précédentes aux rayons, qui s'ecartent de l'axe de la lentille & à l'aberration à cause de la sphericité.

1.) Pour appliquer les formules précédentes à la détermination de la route des rayons, qui s'ecartent de l'axe de la lentille, on n'a, qu'à donner à l'objectif une ouverture quelconque, que nous supposerons cependant telle, qu'on puisse negliger sans erreur sensible les puissances plus hautes que le cube, du sinus de l'angle ω, sous le quel les rayons s'ecartent de l'axe de la lentille. Developpant en consequence les formules précédentes, on a

$$\text{sin. } u = (\lambda - 1) \,.\, \text{sin. } \omega + \tfrac{1}{2} \lambda \,.\, (\lambda - 1) \text{ sin. } \omega^3,$$

$$\text{cos. } u = 1 - \tfrac{1}{2} (\lambda - 1)^2 \,.\, \text{sin. } \omega^2, \ \&$$

$$\text{sin. } \psi = \left(\frac{(n-1)\lambda - n}{n}\right) \text{sin. } \omega$$

$$+ \tfrac{1}{2} \frac{(n-1)}{n^2} (\lambda - 1) \lambda \,.\, (\lambda + n) \,.\, \text{sin. } \omega^3,$$

d'où, en mettant pour abreger

M =

$$M = \frac{n f (\lambda - 1)}{(n-1)\lambda - n} = \frac{n f y}{(n-1) y - f} \text{ \&}$$

$$N = \frac{1}{2} \frac{(n-1) f (\lambda - 1) \lambda^2 (\lambda + n)}{n [(n-1)\lambda - n]^2} = \frac{1}{2} \frac{(n-1) y (f+y)^2 [(n+1) f + y]}{n f [(n-1) y - f]^2},$$

on obtient $A O = K = M - N \text{ fin. } \omega^2$, enforte, que M defigne la diftance de l'image principale & $N . \text{fin. } \omega^2$ l'aberration, *après la feule premiere refraction.* Donc fi nous mettons la diftance de l'image principale après la feule premiere refraction $M = k$, on a $\frac{n f y}{(n-1) y - f} = k$ &

$$N = \frac{1}{2} . \frac{(k+y)^2 (n k + y)}{(n-1)^2 . k y}.$$

Or en fubftituant $\frac{1}{n}$; $-g$; $-K$ & $-\psi$ à la place de n; f; y & ω, on change l'expreffion pour la diftance A O en celle pour la diftance B V; moyennant quoi on a immediatement

$$B V = \frac{g K}{(n-1) K + n g} - \frac{1}{2} \frac{(n-1) K (K+g)^2 [n K + (n+1) g]}{g [(n-1) K + n g]^2} . \text{ fin. } \psi^2$$

ou en fubftituant la valeur de $K = k - N . \text{fin. } \omega^2$

$$B V = \frac{g k}{(n-1) k + n g} - \frac{n g^2 N}{[(n-1) k + n g]^2} . \text{ fin. } \omega^2$$
$$- \frac{1}{2} . \frac{n (n-1) k (k+g)^2 [n k + (n+1) g]}{g [(n-1) k + n g]^2} . \text{ fin. } \psi^2.$$

Or pour le cas, ou ω & ψ font des angles infiniment petits, on a $B V = \alpha$; & confequemment

$$\frac{g k}{(n-1) k + n g} = \alpha \text{ \& } g = \frac{(n-1) k \alpha}{k - n \alpha};$$

moyennant quoi, en mettant pour abreger $\frac{(k-\alpha)^2 (n k - \alpha)}{2 (n-1)^2 k \alpha} = N'$ & ayant $\text{fin. } \psi = \frac{y}{k} \text{ fin. } \omega$, on obtient

$$B V = \alpha - \frac{n}{k^2} [\alpha^2 N + y^2 N'] . \text{ fin. } \omega^2,$$

enforte, que l'aberration caufée par la fphericité de la lentille, fe trouve

$$\frac{n . \text{fin. } \omega^2}{k^2} [\alpha^2 N + y^2 N'] \text{ ou}$$

$$\frac{n \alpha^2 x^2}{k^4} \left[\frac{N}{y^2} + \frac{N'}{\alpha^2}\right] \text{ à caufe de fin. } \omega = \frac{x}{y}.$$

La

La quantité k etant arbitraire: il eſt intereſſant de ſeparer dans cette expreſſion les termes, qui contiennent k. En developpant en conſequence le facteur $\frac{N}{y^2} + \frac{N'}{\alpha^2}$ & ayant $\frac{1}{y} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$ & conſequemment

$$\frac{1}{y^3} + \frac{1}{\alpha^3} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{3}{\alpha y}\right),$$

nous aurons l'expreſſion ſuivante de l'aberration

$$\frac{n\,\alpha^2 x^2}{2(n-1)^2 p}\left[n\left(\frac{1}{p} - \frac{3}{\alpha y}\right) - \frac{(2n+1)}{k}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{y}\right) + \frac{n-2}{k^2}\right],$$

la quelle, ſi on la reſtreint à l'aberration des rayons partant du *centre* de l'objet qui eſt dans l'axe, en mettant $y = \alpha$, ſe change en celle, que Mr. Klugel a donnée dans ſon excellent traité de Dioptrique.

2.) La partie de cette expreſſion, affectée de la quantite k eſt un *maximum* & conſequemment l'aberration un *minimum*, pour la valeur

$$\frac{1}{k} = \frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right).$$

Soit donc généralement

$$\frac{1}{k} = \frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right) + Z,$$

& on aura pour l'aberration l'expreſſion

$$\frac{n\,\alpha^2 x^2}{2(n-1)^2(n+2)\,p}\cdot\left[\frac{4n-1}{4p^2} + \frac{(n-1)^2}{a\alpha} + (n+2)^2 Z^2\right]$$
$$= \Sigma + \frac{n(n+2)\,\alpha^2 x^2}{n(n-1)^2 . p} . Z^2;$$

ayant mis pour abreger la moindre aberration poſſible

$$\frac{n\,\alpha^2 x^2}{2(n-1)^2(n+2)\,p}\left[\frac{4n-1}{4p^2} + \frac{(n-1)^2}{a\alpha}\right] = \Sigma,$$

qu'on tire de la formule précédente, en faiſant $Z = 0$. La quantité k & conſequemment Z étant arbitraire: on peut, en introduiſant à la place de Z d'autres variables, qui ayent un rapport connu à la variable Z, donner de différentes formes à l'expreſſion de l'aberration de ſphericité. C'eſt ainſi p. e. qu'en ſuppoſant dans l'expreſſion précédente

$$(n + 2)^2 Z^2 = \frac{4n - 1}{4p^2} v^2,$$

on en tire immediatement celle, dont Mr. Euler ſe ſert dans ſa Dioptrique; ſçavoir

$$\frac{\mu . \alpha^2 x^2}{p} \left[\frac{1 + v^2}{p^2} + \frac{v}{a\alpha}\right];$$ ayant mis

$$\mu = \frac{n(4n - 1)}{8(n - 1)^2 (n + 2)}; \; \nu = \frac{4(n - 1)^2}{4n - 1}$$ & on aura

$$k = \frac{2n + 1}{2(n + 2)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right) \mp \frac{v . \sqrt{(4n - 1)}}{2(n - 2)p}.$$

Or M. Euler ayant deſigné par λ ce que nous avons deſigné ici par $1 + v^2$; ſi nous mettons pour abreger le facteur

$$\frac{\mu}{p}\left[\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\nu}{a\alpha}\right] = P;$$

l'expreſſion de l'aberration ſera $P\alpha^2 x^2$, dans la quelle le cas du *minimum* eſt deſigné par la valeur $\lambda = 1$, comme il eſt deſigné dans l'expreſſion trouvée cy-deſſûs par la valeur $Z = 0$.

Fig. 4. 3.) Cette meme formule nous ſervira auſſi pour determiner l'aberration cauſée par la 2de lentille. L'effet de l'aberration cauſée par la premiere lentille conſiſte à faire naitre derriere cette lentille deux images de l'objet; l'image principale F, placée à la diſtance $AF = \alpha$, & l'image f placée à la diſtance $Af = \alpha - P\alpha^2 x^2$, enſorte, que ces deux images ſont placées devant la ſeconde lentille, la premiere à la diſtance $FB = b$, la ſeconde à la diſtance $fB = b + P\alpha^2 x^2$. La premiere, formée par des rayons infiniment proches à l'axe, n'etant ſujette à aucune aberration, fera naitre une image derriere la ſeconde lentille à la diſtance $BG = \beta = \frac{bq}{b - q}$. Pour ce qui regarde la ſeconde, formée par des rayons qui paſſent par l'extremité de l'ouverture de la premiere lentille: les formules précédentes nous determinent l'*aberration* de l'image,

image, qui en nait derriere la seconde lentille; car Q designant pour la seconde lentille ce que P designe pour la premiere, ensorte que

$$Q = \frac{\mu'}{q}\left(\frac{\lambda'}{q^2} + \frac{\nu'}{b\beta}\right),$$

& mettant la distance de l'image principale du point f derriere la seconde lentille ou la distance $BG' = \beta'$, on n'a, qu'à substituer $b + P\alpha^2 x^2$, $\frac{bx}{\alpha}$ (voy. II.) & β' à la place de y, x & α, & cette aberration sera exprimée par

$$Q.(\beta')^2.\frac{b^2.x^2}{\alpha^2} = G'g,$$

donc $Bg = \beta' - G'g$, & l'aberration totale derriere la seconde lentille sera $gG = \beta - \beta' + G'g$. Or par les formules précédentes on a

$$\beta' = \frac{(b + P\alpha^2 x^2)q}{b + P\alpha^2 x^2 - q} = \frac{bq}{b-q} - \frac{q^2.P\alpha^2 x^2}{(b-q)^2} = \beta - \frac{\beta^2}{b^2}.P\alpha^2 x^2;$$

donc substituant cette valeur on a l'aberration totale derriere la seconde lentille

$$= \beta^2\left[P.\frac{\alpha^2}{b^2} + Q.\frac{b^2}{\alpha^2}\right].x^2.$$

& par un pareil calcul on trouvera celle derriere la troisieme lentille

$$= \gamma^2\left[P.\frac{\alpha^2\beta^2}{b^2c^2} + Q.\frac{b^2\beta^2}{\alpha^2c^2} + R.\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2}\right].x^2$$

& ainsi de suite. Ce qu'on appelle le *demidiametre de la confusion* qui en resulte dans la Vision, n'entre pas *proprement* dans ce raccourci, vûque pour aneantir cette confusion ou pour la rendre aussi petite que possible, il faudra toujours rendre *l'aberration meme* egale à zero, ou la diminuer autant que les autres circonstances le permettent, quelle que soit la maniere, qu'on ait choisie pour *estimer* le degré de confusion qui en est *sentie* dans la Vision, tandisque l'aberration n'est pas entierement anéantie.

Application des formules précédentes à la differente refrangibilité des rayons differemment colorés.

1.) Suppofons, que dans les formules précédentes la quantité n qui exprime la loi de la refraction, foit tirée de la nature des rayons de *moyenne refrangibilité*, refractés par un verre d'efpece donnée. Pour les appliquer à la determination de la route des rayons de la plus petite, & de la plus grande refrangibilité: on n'a qu'à rechercher les variations de ces formules, qui refultent des variations de la quantité n, & de faire varier la quantité n de façon, que le rayon, dont la route eft exprimée par ces formules, devienne le rayon rouge ou violet. Or les variations de la quantité n en produifent une dans la *diftance* de l'image principale derriere la lentille ou une aberration *longitudinale*, qui fera $= \partial \alpha$, les variations de la quantité n etant confiderées comme infiniment petites. Or les formules précédentes nous donnent immediatement

$$\partial \alpha = \frac{\alpha^2 . \partial p}{p^2} = -\frac{\alpha^2 . \partial n}{p(n-1)} \text{ à caufe de } p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$$

& de là on trouve auffi la variation de l'angle du rayon refracté avec l'axe de la lentille, ou l'aberration *angulaire;* car ayant trouvé $\psi = \frac{x}{\alpha}$, & par confequant $\partial \psi = -\frac{x \partial \alpha}{\alpha^2}$, on aura $\partial \psi = \frac{x . \partial u}{p.(n-1)}$. Comme $\alpha + b$ eft l'intervalle entre la premiere & la feconde lentille; cet intervalle etant conftant, on a $\partial b = -\partial \alpha$. Or fachant, que le rayon violet eft le plus refrangible & que le rayon rouge l'eft le moins; on a, en prenant la variation ∂n pofitive, la diftance de l'image violette à la feconde lentille

$$b + \partial b = b - \partial \alpha = b + \frac{\alpha^2}{p} . \frac{\partial n}{n-1},$$

& en prenant la variation ∂n negative, la diftance de l'image rouge à la meme lentille $= b - \frac{\alpha^2}{p} . \frac{\partial n}{n-1}$.

2.)

2.) Les images colorées de la plus grande & de la plus petite refrangibilité etant ainſi ſeparées: on n'a, qu'à appliquer à l'une & l'autre les formules précédentes. Soit donc la ſeconde lentille faite d'une eſpece de verre, pour la quelle la loi de refraction ſoit exprimée par n' pour les rayons de *moyenne* refrangibilité. La diſtance du foyer de la lentille pour les rayons moyens etant $= q$; celle pour les rayons violets ſera $q - q. \frac{\partial n'}{n' - 1}$, & pour avoir l'aberration *longitudinale* de la ſeconde image ou la valeur de $\partial \beta$, on n'a, qu'à ſubſtituer dans l'expreſſion pour β à la place de β, b & q ces memes quantités augmentées de leurs differentielles; c'eſt à dire, à differentier l'equation $\beta = \frac{b q}{b - q}$ en ſuppoſant b & q variables; ce, qui donne

$$\frac{\partial \beta}{\beta^2} = \frac{\partial q}{q^2} - \frac{\partial b}{b^2}.$$

En prenant donc les variations ∂n & $\partial n'$ poſitives, on aura pour l'image violette

$$\frac{\partial b}{\beta^2} = - \frac{\partial n'}{q(n' - 1)} + \frac{\partial \alpha}{b^2} = - \frac{\partial n'}{q(n' - 1)} - \frac{\alpha^2}{b^2} \cdot \frac{\partial n}{p(n - 1)}$$

& conſequemment l'aberration de refrangibilité pour l'image *violette* ou

$$\partial \beta = - \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2} \left[\frac{\partial n}{p(n - 1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q} \cdot \frac{\partial n'}{(n' - 1)} \right]$$

d'où, en prenant les variations ∂n & $\partial n'$ negatives, on a auſſi l'aberration de refrangibilité pour l'image *rouge*,

$$\partial \beta = \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2} \left[\frac{\partial n}{p(n - 1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q} \cdot \frac{\partial n'}{(n' - 1)} \right]$$

& par un calcul ſemblable on trouve l'aberration *longitudinale* de l'image formée par la troiſieme lentille, ou

$$\partial \gamma = \pm \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{b^2 c^2} \left[\frac{\partial n}{p(n - 1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q} \cdot \frac{\partial n'}{(n' - 1)} + \frac{b^2 c^2}{\alpha^2 \beta^2 . r} \cdot \frac{\partial n''}{(n'' - 1)} \right],$$

& ainſi de ſuite.

Donc afin que l'image formée p. e. derriere la troisième lentille soit delivrée de toute confusion causée par la differente refrangibilité des rayons colorés, il faut, que $\partial\gamma = 0$. Consequemment si les lentilles sont faites de la meme espece de verre; à cause de $n = n' = n''$, il faudroit faire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{\alpha^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{b^2 c^2}{\alpha^2 \beta^2} = 0;$$

mais, si les trois lentilles sont faites de differentes especes de verre, l'équation, à la quelle il faut satisfaire pour detruire cette aberration, est celle-cy:

$$\frac{\partial n}{p(n-1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q} \cdot \frac{\partial n'}{(n'-1)} + \frac{b^2 c^2}{\alpha^2 \beta^2 . r} \cdot \frac{\partial n''}{(n''-1)} = 0.$$

Voici donc en raccourci les elemens principaux de la Theorie des objectifs composés, ainsi que les conditions, aux quelles il faudroit satisfaire dans leur construction, pour les rendre achromatiques & les plus propres à etre appliqués aux Microscopes; mais il s'agit d'y satisfaire, de la maniere la plus *favorable aux autres perfections*, aux quelles on est en droit de s'attendre dans un excellent instrument de cette espece.

PHYSI-

PHYSICA.

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio VI.

PARS POSTERIOR.

VENTRICVLVS SINISTER.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 22 Iunii. 1786.

Ventriculus sinister. Dispositio fibrarum in vniuersum confirmata.

In sinistro ventriculo vix quidquam est, quod non fuerit confirmatum, nisi vt praeter ea, quae in Dissertatione IVta de fibris externis ventriculi sinistri notaueram, plura potius noua inuenerim, quae in primis cordibus non statim animaduerteram. *Dispositio fibrarum in vniuersum* ipsa eadem in singulis quae posthaec vidi, cordibus inuenta est; vt funes crassi ramificati in parte gibbosa prope basin *a*), planae confluentes dexterius ad crenam *b*), sinisterius ad marginem funiculi teretes *c*), radia-

a) Tab. IV. Q. D. R. Tab. I. 59. L. B.

b) Tab. IV. 73. 75. 79. 83. Tab. I. 89. 89.

c) Tab. IV. Q. R. Tab. I. 59. 86.

diatae demum fibrae verſus apicem *a*) in ſuperiori cordis ſuperficie, in inferiori vero longae ſubteretes fasciatae fibrae *b*), eſſent.

Varii ordines fibrarum confirmati. Ordo primus.

Ventriculi huius, ſicuti dextri, *limites*, *ortum*, *progreſſum*, *inſertionem*, fibrarum plane eadem in corporibus omnibus eſſe, vix opus eſt, vt moneam. Eo vsque enim ſtructura corporis humani non eſt variabilis, vt in his reliquae ſtructurae fundamentis etiam natura vacillet. Sed *ordines* quoque *quatuor* illi, in quos fibras externas ventriculi ſiniſtri diuideram, accurate vbique et ſimili modo diſtincti reperti ſunt. *Fibrae ordinis primi*, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, et ab interſtitio dimidio inter fila ſiniſtra, inſertae in poſteriorem, eamque maximam, partem ſtriae in vno atque in altero corde ſimili prorſus modo reperiuntur *c*). Progreſſu ſimili, ſimili directione, ſimilique ductu hae fibrae, ſimili modo inſertionis in ſtriam, ſimilibus in itinere connexionibus inter ſe, verbo proprietatibus ſimilibus omnibus, ita vt vnquam duae ſtructurae aliae quaecunque in duobus corporibus ſimiles reperiri poſſunt, in duobus his cordibus, vti in caeteris, quae vidi, apparent. Hoc ſolum intereſt: Vti ſtria in corde hoc poſteriori citius euaneſcit, partemque longitudinis ſuperficiei prope apicem vacuam relinquit; duae fibrae *d*) ordinis primi ex ſiniſtro in dextrum ventriculum per hanc ſedem tranſeunt, quae in corde primo in continuatam ſtriam inſeruntur. Reliquae huius ordinis, pariter duae tantum, ad priores ſe applicant *e*). Vt totam ſtriam

---

a) Tab. IV. 89. 98. 100. Tab. I. 96. 104. E.
b) Tab. VI. 13. 80. Tab. III. 17. 50.
c) Tab. VI. 9. 10. 11. 12. F. C. Tab. III. 6. 8. 10. 14. 17. 18. 19.
d) Tab. VI. 44, 45.
e) Tab. VI. 9. 10. 11.

am quidem, at non totam mediam ſuperficiei inferioris longitudinem, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupent. Atque haec ſtructura omnino conſtantior mihi eſſe videtur.

Ordo ſecundus.

Pari conſtantia ſe ordo fibrarum ſecundus praebuit. Funibus is conſtat ſubteretibus, compreſſis, magnis *a*), ramificatis *b*), interſtitiis diſtinctis, peculiari genere fibrillarum nectentium repletis *c*), vti in caeteris, ſic in his cordibus citatis duobus. Oriuntur hi funes ab interſtitio dimidio anteriori inter bina fila cartilaginea ſiniſtra, a toto filo ſiniſtro anteriori, ab eius nodulo, ſiue radice, et a parte ſiniſtra baſis aortae *d*). In hoc quidem, vti ex citatis ſedibus apparet, duo maximi funes *e*), praeter columnam triangularem et fibras foſſae triangularis *f*), a baſi aortae oriuntur, quod et in aliis iam cordibus obſeruaui. In corde priori vnus ſolus funis *g*) aortae adhaeret; reliqua huius pars columna triangulari et foſſa occupatur. In vtroque corde ea obliquitate funes progrediuntur, vt marginem nacti, plus quam dimidiam eius partem poſteriorem occupent *h*). Simulque in ſede eadem in fibras reſoluti ſunt, vt inferiorem ſuperficiem intrando merae appareant ſimplices fibrae longae, ſatis craſſae quidem, at ſimiles inter ſe et aequales *i*). Praetereaque id habent commune, vt frequenter

 a

a) Tab. IV. 47. 48. 49 51. 52. 60. 65. 69.
Tab. I. 60. 61. 62. 64. 67. 70. 81. 82.
b) Tab. IV 52 54. 55. 60 61 62. Tab. I. 70. 71. 72. 73.
c) Tab. IV 58. 63. Tab, I. 65. 68. 78.
d) Tab. V. 23 24. 25. 27. 30. 32. 43. 48. Tab. II. Y. 4. 3. D. B.
e) Tab. V. 43 48. Tab. IV. 60. 65.
f) Tab. V. 52. 53.
g) Tab. II. 21.
h) Tab. IV. 71. Tab. I 85. 85
i) Tab. VI. 13. 22. Tab. III. 17. 48.

a ſe mutuo ſecedant, interſtitiaque efficiant, oblonga, fibrillis repleta *a*). Inſeruntur demum in vltimam partem ſtriae, et in faſciculos, de quibus in ſequentibus dicam, aut ſi ſtria, brevior, fibris citius diſperſis, ad apicem vsque non pertingit, in ſolos hos faſciculos. *b*).

Varia noua in ventriculo ſiniſtro poſterioribus experimentis reperta. Definitio funium ſingulorum, quo vsque conſtantes ſunt.

Praeter ea, quae ſimilia in hoc corde ſecundo cum corde priori et confirmata reperi, varia quoque noua obſeruata ſunt, quae vel minus diſtincte expreſſa in corde priori, minusque inſignia, apparuerant, quin pro rebus peculiaribus haberi potuerint, vel praeteruiſa ſunt a me, et poſterioribus demum obſeruationibus percepta. Haec, quae in ſecundo, tertio, et quarto fibrarum huius ventriculi ordine imprimis occurrunt, ſuis quaelibet locis addam. Deſcripſeram in Diſſertatione IVta ſingulos funes quidem ordinis ſecundi, vti ſe nempe in illo corde primo haberent; non credideram vero, vt conſtantes eſſent. Neque ſunt etiam omnino conſtantes poſterioribus periculis reperti, vt veluti faſciae ventriculi dextri, aut toti ordines ſiniſtri, ſine variatione iidem prorſus in variis cordibus reperirentur. Nec tamen vero penitus quoque variabiles ſunt, quin collectis conſtantioribus, reiectis reiiciendis, aliquomodo definiri hi ſinguli funes poſſent. Sunt ergo in iis: 1) *Funiculi*, aut *primae fibrae* ordinis ſecundi *c*). Hi ſatis ſimiles in ſingulis, vti in his cordibus duobus, ſede, longitudine, craſſitie, ductu, directione, apparent. Sunt quatuor vel quinque numero. Oriuntur conſtanter ab interſtitio dimidio anteriori inter

a) Tab. VI. 61. 63. 64. 60. 65. Tab. III. 14. 18. 21.
b) Tab. VI. 53. 68. 69. 75. Tab. III. 30. 35. 41
c) Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50. Tab. I. 59. 60. 61. 62.

inter bina fila finiſtra. Breues, ſimplices, absque fere ramificatione ad marginem arcuatim properant tranſeuntque in ſuperficiem inferiorem. Sequitur poſt illos 2°.) *funis*, quem dicas *magnum*, ſiue *diuiſum*, ſiue *laceratum* *a*). Conſtat quaſi ex duobus funibus, radicibus ſuis confluentibus. In corde priori duo cohaerentes eſſe videbantur; in hoc et in aliis vnus potius erat, omnium craſſiſſimus, qui tamen facile in duos dividi poterat *b*). Vocaui ob hanc cauſam magnum, vel diuiſum. Soletque cum ſequenti fune ramis anaſtomoticis coniungi *c*), et interſtitia formare, fibrillis repleta, *d*) quapropter laceratum dixi. In aliquot ramos ille porro diuiſus *e*) ad marginem progreditur. Tertius funis eſt, quem *ramificatum* dicas, cum in pluribus cordibus maxime inter omnes ramificatum illum inuenerim, quamuis in hoc corde ſimplicior ſit. *f*) Hanc ſimplicitatem maxime pro variatione habeo. In alio corde duplicem hunc funem reperi, alterum ſingulari modo ramificatum, alterum trifurcatum, ſimillimum ei, in corde priori *g*) reperto. Quartus denique et vltimus conſtituendus eſſe videtur, quem *funem applicatum* dixi, cum fibris primis, ex ponte productis, ſe applicet, cum iisque ſe ſoleat confundere *h*). Hic duplex eſt, vti ex citata tabula apparet, in corde priori. In corde eodem primo magnus, ramificatus, et bini applicati a filo cartilagineo ſiniſtro eiusque nodulo *i*),

 in

a) Tab. IV. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. Tab. I. 64. 65. 66. 67.
b) Tab. V. 30. 32. 33. 38. 39.
c) Tab. V. 33. 35.
d) Tab. V. 42. 34. 37. Tab. I. 68.
e) Tab. IV. 54. 55. 56. Tab. I. 64. 66. 69.
f) Tab. IV. 60. 61. 62. Tab. I. 70. 71. 72. 73. 75. 76.
g) Tab. I. 70 71. 72. 73. 74.
h) Tab. IV. 65. 66. 70. Tab. I. 81. 82. 83. 84.
i) Tab. II. 21. 22. 23. 24. 25.

in hoc ſecundo ſolus magnus a filo *a*), ramificatus et applicatus a baſi aortae et principio crenae *b*), oriuntur. Huiusmodi ſunt varietates in funibus. Nec tamen vnquam hactenus, quos non funiculos minores, aut magnum atque diuiſum, aut ramificatum, ſede et ordine, aut applicatum, vocarem, reperi, nec vnquam quisquam ex his in iis, quae hactenus vidi, cordibus defuit. Duplex tamen vnus vel alter inuentus eſt, vti et interiectas fibras duplices, et duplicem pontem, repertos eſſe monui; vt id quidem, genera fibrarum varia duplicia inueniri, ſolitum fere eſſe videatur in cordis ſtructura.

Varia in primis experimentis neglecta, accuratius nunc inquiſita. Tranſitus funium ſuper marginem, eorumque inſertio.

In corde primo, cum omnia adhuc noua mihi eſſent, ipſaque haec noua innumerabilia fere et immenſa viderentur, vix fieri potuit, quin quaedam notabilium neglexerim, vt alia eo accuratius notarem. Sic factum eſt, vt fibras quidem ſingulas ventriculi ſiniſtri a filo, ab aorta et crena ad marginem vsque in ſuperiori ſuperficie, et rurſum a margine ad ſtriam in inferiori, quantum fieri poterat, proſequerer, ad continuationem vero earundem ex ſuperiori ſuperficie ſuper marginem in inferiorem animum minus aduerterem. Hinc varia in commoda naſcebantur. Non certum erat, vtrum immutatae fibrae ex altera in alteram ſuperficiem tranſirent, an confluendo ſpeciem ſuturae forte, ſimilem crenae, efficerent, ex qua nouae quaſi fibrae orirentur. Non ſatis accurate conſtabat, quaenam fibrarum ſuperficiei inferioris ex funibus, quaenam ex ordine tertio continuatae eſſent vel quarto. Neque quam partem ergo

a) Tab. V. 32.

b) Tab. V. 43. 48. u. Tab. IV. 65. 66.

go fibrae funium quoque in inferiori ſuperficie cordis, quamque regionem occuparent, exacte determinari poterat. Neque tandem mihi ipſi ſatisfacere poteram, niſi ſingulos funes, ſingulasque memorabiles fibras ab ortu ad finem vsque proſecutus, meisque oculis et digitis comitatus eſſem; cum ſemper timerem, ne fibris in hac itineris parte aliquid accideret ſingulare, quod me fugeret. Proximis ergo periculis, quam potui accuratiſſime, in eam rem inquiſiui. Notaui ad icones, quaenam in inferiori, quae in ſuperiori, ſuperficie eae fibrae erant ſingulae, quas in corde praeparato in ſe mutuo continuare videram, ſic progreſſum non modo ſingulorum funium ad extremos fines vsque, ſed inſertionem quoque eorum accuratius determinare potui. Antequam vero haec exponam, de ipſa hac ſede inſertionis funium alias referre oportet haud ponderis minoris obſeruationes nouas. Concernunt faſciculos illae, quos, minus inſignes procul dubio, minusque diſtincte expreſſos, praeteruideram in corde priori, in hoc maxime inſignes reperi, et accurate pinxi. *a*) Dixi *terminales* illos, cum fibras ventriculi ſiniſtri terminent et ordini imprimis ſecundo et tertio ſedem inſertionis in inferiori ſuperficie cordis largiantur *b*).

Sedes faſciculorum terminalium. Vallecula.

In medio interſtitio inter binos apices ventriculorum conſtanter *vallecula* eſt, haud innota anatomicis, cum etiam in corde, membrana induto, ſatis notabilis nonnunquam appareat, Hallero recte *vallecula* dicta. Maior haec profundiorque et inſignior eſt, ſi magis, velut in hoc corde, apices ventriculorum

---

a) Tab. VI. 4. 5 — 6. 7 — 8. Tab. IV. 104 — 103 — 99. 100.
b) Tab. VI. 53. 55. 68. 69. 72. 75.

rum prominent, *a*) leuior, fi minus illi diftincti, ficut in corde priori *b*). In fuperiori fuperficie cordis vallecula fimplex interftitium fatis latum eft inter binos prominentes apices *c*). In inferiori vero praeter idem interftitium *d*) vallecula ad aliquam notabilem longitudinem in fuperficiem continuat *e*). Planus enim compreffus apex ventriculi dextri papillaris *f*) parte latiore *g*) innatus eft globofae fuperficiei apicis ventriculi finiftri *h*), vltima fui parte *i*) prominendo. Sic dum finiftro apici margine fuo, fatis craffo, prominente, finiftro, dexter incumbit, infigniter eminet fuper finiftri fuperficiem, valleculamque ea ratione *k*), interftitio continuam, efficit.

Margines ventriculorum prominentes.

Si ftria totam longitudinem cordis in inferiori fuperficie emetitur, ftria et crena in hac vallecula concurrunt et finis ftriae in ea fede cenfetur ad inferiorem, *l*) crenae ad fuperiorem, *m*) fuperficiem. Si vero, velut in hoc corde, ftria citius euanefcit; reliqua longitudinis cordis in inferiori fuperficie pars vacua fibras ventriculi finiftri in dextrum tranfire ventriculum permittit, vnamque communem efficere in ea fede

a) Tab. IV. E. Tab. VI. 101.
b) Tab. I. D.
c) Tab. IV. E. P. T.
d) Tab. VI. 101. 80. 100.
e) Tab. VI. 6. 8.
f) Tab. VI. 6. 8. 100. 95.
g) Tab. VI. 6. 8.
h) Tab. VI. 6. 5.
i) Tab. IV. 8. 100.
k) Tab. VI. 5. 6. 8.
l) Tab. III. 32.
m) Tab. I. D.

ſede ventriculorum ſuperficiem *a*). Siue ad valleculam vero vsque ſtria continuet, ſiue citius euaneſcat, margo vtriusque ventriculi, quilibet ſuper apicem ſui ventriculi continuando, ad valleculam curuatus redit *b*), in eaque vna cum crena et ſtria, ſi haec poſterior eo vsque peruenit, vterque concurrit. Sic aliqua marginis pars in ventriculo vtroque inter ipſum apicem ventriculi, id eſt partem eius maxime prominentem, *c*) et valleculam *d*) continetur *e*), quae aliter atque reliquus margo, non dextrorſum in dextro ventriculo, ſed ſiniſtrorſum, aut ſiniſtrorſum et antrorſum oblique, in ſiniſtro non ſiniſtrorſum, ſed dextrorſum, aut dextrorſum oblique et antrorſum, ſpectat, aliumque quaſi, a proprio maiori cuiusque ventriculi, ſiniſto ſiniſtri, dextroque dextri, diuerſum vtriusque ventriculi marginem efficit, *prominentem* ſcilicet *dextrum* ſiniſtri ventriculi quem dicas, et *ſiniſtrum prominentem* dextri, qua nempe appellatione parui hi margines a marginibus, quibus ad crenam et ſtriam ventriculi cohaerent, diſtinguuntur. Margo ergo prominens dexter ventriculi ſiniſtri *f*) totus ipſa ſedes eſt faſciculorum terminalium huius ventriculi, quam ſecundum longitudinem a vallecula ad apicem ventriculi vsque procurrendo occupant.

Faſciculi terminales ventriculi ſiniſtri.

Sunt tres faſciculi terminales ventriculi ſiniſtri, quos ſi numero diſtingueres, neſcires, quem primum, aut quem tertium

a) Tab. VI. 44. 45.
b) Tab. VI. 80. 7. 6 — 100. 8. 6.
c) Tab. IV. T. P. Tab. VI. 80. 100.
d) Tab. IV. E. Tab. VI. 101. 6.
e) Tab. IV. E. P. — E. T. Tab. VI. 80. 7. 8. 6 — 6. 100.
f) Tab. VI. 4. 6. 7. 80. Tab. VI. E. T.

tium potius, dicas; cum, qui primus omni respectu in superiori superficie est *a*), tertius sit omni respectu in inferiori *b*); primus contra procul omni dubio in inferiori *c*), qui tertius in superiori superficie esse videtur *d*). Dixi *superiorem*, qui maxima sui parte in superiori superficie situs est *e*), in eaque magnitudine et insertione, quam in ea superficie habet, primarius esse videtur, *inferiorem*, qui maximam partem in inferiori superficie versatur *f*), atque in ea magnitudinis et ortus respectu primarius est, *medium*, qui medius inter illos continetur, et dimidius in qualibet superficie existit *g*). Oriuntur in inferiori superficie ex vallecula teretes compressi subventricosi musculi in hoc corde *h*), pollicem cum dimidio longi, tres vel quatuor lineas crassi, principiis angustioribus, firmioribus, quasi subtendineis. Progrediuntur inde secundum marginem prominentem dextrum ventriculi sinistri, quem tegunt *i*), ad apicem vsque huius ventriculi *k*), in quem ad superiorem superficiem inseruntur *l*). Ductu ergo obliquo, longitudinali tamen, respectu marginis, ductui proximo, procedunt, vt, orti in inferiori superficie cordis, oblique super marginem flexi *m*), in superiorem transeant superficiem *n*), in eaque suam sedem insertionis habeant.

Fasci-

---

a) Tab. IV. 99. 100.
b) Tab. VI. 8.
c) Tab. VI. 4. 5.
d) Tab. IV. 104.
e) Tab. IV. 99. 100. Tab. VI. 8.
f) Tab. VI. 4. 5. Tab. IV. 104.
g) Tab. IV. 108. Tab. VI. 6. 7.
h) Tab. VI. 4. 5 — 6. 7 — 8.
i) Tab. VI. 4. 5. 6. 7. 8. Tab. IV. E. 103. 104. T.
k) Tab. VI. 80. Tab. IV. T.
l) Tab. IV. 100.
m) Tab. VI. 5. 7. 8.
n) Tab. IV. 99. 100. 103. 104.

Fasciculus terminalis ventriculi dextri.

His tribus fasciculis terminalibus ventriculi sinistri quartus in hoc corde accedit *dextri ventriculi fasciculus terminalis a*), qui tamen, cum in nullo adhucdum alio cum corde praeter hoc repererim, pro rariori structura habendus esse videtur. Oritur hic pariter in inferiori cordis superficie ex vallecula, iuxta terminales ventriculi sinistri, tenuior fasciculus, principio paulo crassior *b*), inde in simplicem sensim extenuatus fibram *c*). Descendit inde in eadem superficie ad marginem prominentem sinistrum ventriculi dextri vsque ad apicem eius *d*). Ibi oblique flectitur in superiorem superficiem *e*), vltimam in ea fibram efficiens ventriculi dextri, praecedentibus caeteris aequalem, et inseritur in crenam. Dum ex vallecula ortus ad apicem vsque in inferiori superficie iuxta marginem descendit, vltimae fibrae ventriculi dextri, quae hactenus primo a stria, deinde ex fibris ventriculi sinistri continuatae, ortae erant, ab eo fasciculo terminali oriuntur *f*).

Fasciculus terminalis ventriculi sinistri superior.

Superior fasciculus terminalis ventriculi sinistri g), vti tertius ordine in inferiori superficie est, sub medio in hac superficie ex vallecula oritur, principio satis lato *h*), mediae parti fasciculi terminalis dextri ventriculi *i*) innato; ita vt pro-

 prie

a) Tab. VI. 98. 100.
b) Tab. VI. 98.
c) Tab. VI. 100.
d) Tab. VI. 100.
e) Tab. IV. P.
f) Tab. VI. 99. 100.
g) Tab. VI. 8. Tab. IV. 99. 100.
h) Tab. VI. 8.
i) Tab. VI. 98. 100.

prie a media huius fasciculi parte oriatur. Ipso in eo principio iam ita positus est, vt vna cum margine sui ventriculi pro minente oblique sinistrorsum antrorsum, haud deorsum cum inferiori cordis superficie, respiciat, proinde, neque in inferiori, neque in superiori, cordis superficie, sed in ipso margine, hac sui parte collocatus existat. Sic ortus continuo flectitur, in superioremque prodit superficiem *a*), in quam quasi attractus, primo sursum et retrorsum fibris suis contra crenae ductum, dein sinistrorsum flexus progreditur subuentricosus paulatim extenuatus musculus, formatoque arcu, transuersim posito, in extremitatem acutam, vnciformem, *b*) abit, quae in extremitatem, pariter vnciformem, funiculi, quem in sequentibus dicam, procurrentis breuis *c*) inseritur.

Fascicuius terminalis medius.

Fasciculus terminalis medius d) ad eandem inferiorem superficiem ex vallecula super priorem a principio fasciculi terminalis dextri ventriculi oritur, *e*) ita scilicet, vt amborum horum musculorum capita profunde sint carni cordis innata. Progreditur hinc secundum longitudinem obtusi crassique marginis prominentis dextri ventriculi sinistri. Denique flectitur oblique circa illum *f*), proditque in superiorem superficiem *g*), in qua oblique paulisper adscendit, inseriturque fibris muscularibus latis in concauum marginem arcuati funiculi superioris.

Funi-

a) Tab. IV. E. 99.
b) Tab. IV. 100. T.
c) Tab. IV. 101.
d) Tab. VI. 6. 7. Tab. IV. 103.
e) Tab. VI. 6.
f) Tab. VI. 7.
g) Tab. IV. 103.

Funiculus terminalis inferior.

Funiculus terminalis inferior a) ad finem ſuperficiei inferioris cordis, proxime ſuper initium valleculae, oritur principio craſſo capitato *b*), carni cordis innato. Progreditur inde ſecundum longitudinem marginis prominentis *c*). Hic vix flexus in ſuperiorem ſuperficiem prodit. Parua ſui parte et extremitate in ea apparet *d*), et continuo prope apicem ventriculi, partim in funiculum medium, partim in extremitatem funiculi ſuperioris iuxta medium, inſeritur. Vt ſuperior ergo in extremitatem vnciformem funiculi procurrentis breuis, medius in ſuperiorem, inferior in medium partim, partim in ſuperiorem, ſit inſertus.

Variationes faſciculorum terminalium.

Haud ſemper tam inſignes hos faſciculos, eorumque, quam efficiunt, ſtructuram, et tam pulchram, quam in hoc corde, reperi. Conſtans tamen omnino eſt, et quamuis minores breuioresque fibras, nunquam nullas tamen poſthaec, quae munere terminalium fibrarum fungerentur, inueni. In aliquo corde tres fibrae, ſatis craſſae, notabiles, terminales erant peculiari ſtructura. Oriebantur capitatis craſſioribus principiis in inferiori cordis ſuperficie ex ventriculo dextro, prope marginem eius dextrum. Deſcendebant inde oblique per valleculam verſus apicem ventriculi ſiniſtri; vt communes hae tres fibrae ſingulares recta ex altero in alterum tranſirent ventriculum, atque coniungerent vtrumque. Vbi per valleculam tranſiebant, flexae ſimul in ſuperiorem, ſiniſtri ſcilicet ventriculi, ſuper-

a) Tab. VI. 4. 5. Tab. IV. 104.
b) Tab. VI. 4.
c) Tab. VI. 5.
d) Tab. IV. 104.

ſuperficiem adſcendebant; vt a margine dextro ventriculi dextri per inferiorem huius ventriculi ſuperficiem et porro per valleculam in ſuperiorem ventriculi ſiniſtri progreſſus eſſet, et continuatio vsque ad eiusdem ventriculi apicem; vbi, ſicut in hoc corde, in procurrentem funiculum breuem inſerebantur; ea nempe ratione, vt, tertia quae erat in inferiori ſuperficie et breuiſſima, prima et longiſſima in ſuperiori, in procurrentem tranſiret ipſa, extremitate ſolita vnciformi; ſecunda et prima, longiores in inferiori ſuperficie, breuiores in ſuperiori in illam inſererentur. In alio corde a fibris, ex ventriculo ſiniſtro in dextrum per eam regionem, vbi ſtria deficiebat, tranſientibus, ea ratione oriri vidi tres breues, at ſatis craſſos, faſciculos, vt ſub iis fibris quaſi prodire viderentur. Hi fere recta ad ductum ſtriae per valleculam deſcendebant, flexique in ſuperiorem ſuperficiem ventriculi ſiniſtri, dextrorſum verſi, ad procurrentem breuem progrediebantur. Vt omnino ergo conſtans ſit haec ſtructura faſciculorum terminalium, qui duobus, ſecundo et tertio, ordinibus fibrarum ſedem inſertionis praebent, ipſique poſtea ſe quarto fibrarum ordini loco vltimarum fibrarum adjungunt, in earumque propriam inſertionis ſedem, funiculum procurrentem breuem, vna cum iis ſe inſerunt; quamuis eam in primo corde non perceperim, aut pro aliqua ſingulari ſtructura cognouerim.

Inſertio fibrarum omnium ordinum accuratius deſcripta.

Inſertio fibrarum ordinis primi.

Expoſitis his ſtriae natura et variationibus, faſciculisque terminalibus ventriculi ſiniſtri, omnium huius ventriculi fibrarum inſertio multo nunc accuratius definiri poterit. Fibrae ordinis primi, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, et dimi-

dimidio interſtitio inter bina fila ſiniſtra *a*), inſeruntur in hoc corde in totam ſtriam *b*), quo vsque ſe haec extendit; deinde vel vna, vix duae fibrae, *c*) tranſeunt in fibras ventriculi dextri. Sequens fibra *d*) tranſit in principium faſciculi terminalis inferioris *e*) et, quae reliquae demum ſunt, tres vltimae *f*) ad priorem, in faſciculum inſertam, ſe applicant. *g*) Vt totam ſtriam ergo, quo vsque ſe haec extendit, et reliquam porro longitudinis ſuperficiei inferioris partem, ad valleculam, ſeu principium terminalis faſciculi inferioris, vsque, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupent *h*); reliquis, quaecunque inferiorem ſuperficiem intrant, fibris ſolus ille faſciculus terminalis inferior pro ſede inſertionis ſuperſit. *i*). In corde priori haud totam ſtriam quidem, at partem tamen longitudinis cordis in inferiori ſuperficie aequalem ei, quam ſtria in hoc corde occupat, fibrae ordinis primi ſua inſertione occupabant; cum ſtria, multo longior, ad extremum finem ſuperficiei inferioris vsque ſe extenderet. Vti vero ſtriae ſtructura, qua deſinit ad aliquam a vallecula diſtantiam, omnino frequentior conſtantiorque eſt; ſine vllo dubio ſtatui poteſt, fibras ordinis primi ſua inſertione totam occupare ſtriam, reliquas ſuperficiei inferioris fibras redire ad terminalem faſciculum inferiorem.

Fibra-

---

a) Tab. VI. F. 9. 10. 11. 12. C.
b) Tab. VI. 30. 32. 35. 39. 41.
c) Tab. VI. 44. 45.
d) Tab. VI. 43.
e) Tab. VI. 46.
f) Tab. VI. 47. 49.
g) Tab. VI. 48. 50. 52.
h) Tab. VI. 9. 10. 11. 12.
i) Tab. VI. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.

Fibrarum ordinis ſecundi inſertio.

Fibrae *ordinis ſecundi*, ſeu funium, primo transuerſim fere *a*) ab interſtitio inter fila cartilaginea ſiniſtra, et ab extremitate fili anterioris verſus marginem progrediendo, poſtremam partem gibboſam marginis occupant *b*); magis deinde magisque oblique a filo verſus eundem deſcendendo plusquam dimidiam partem eius in ſuperiori iam ſuperficie occupant *c*). Vbi ſuperata marginis craſſitie ad inferiorem ſuperficiem in ipſo margine apparent *d*), plus quam tres quartas partes iam eius obliquo et fere longitudinali ſuo progreſſu nactae ſunt. Hinc plane ad longitudinem marginis porro progrediendo *e*) etiam reliquam eius quartam partem ad apicem ventriculi vsque occupant, adeo, vt fibris ordinis tertii nullus porro tranſitus ad inferiorem ſuperficiem pateat, fibraeque ordinis ſecundi omnem, a primo ordine vacuam, partem ſuperficiei inferioris occupent. *f*) Sic partem quaſi dimidiam exteriorem, longiorem, ſuperficiei inferioris tegendo, ductu, margini conformi, fibrae ordinis ſecundi recta in faſciculum incurrunt terminalem inferiorem *g*), in eumque inſeruntur, totam eius longitudinem occupando, exceptis ſolis extremitatibus, inferiori *h*) et ſupe-

a) Tab. IV. 46. 47.
b) Tab. IV. 46. 47. 48.
c) Tab. IV. Q. R.
d) Tab. VI. 13. 22.
e) Tab. VI. 23. 75. Hae fibrae prope apicem ventriculi (Tab. VI. 24. 76. 28. 29.) vt appareant in icone, in ſuperficiem inferiorem pulſae ſunt, et ita pictae. In ſitu ſuo naturali in ea ſuperficie non apparent, cum fibra (24. 76.) ipſum marginem ad inferiorem ſuperficiem teneat, reliquae (25. 26. 27. 28. 29.) in medio margine, et in ſuperiori ſuperficie partim, ſint ſitae.
f) Tab. VI. 46. 47. 48. 49. 50.
g) Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75.
h) Tab. VI. 4[illegible]

ſuperiori *a*). Haec generatim continuatio et decurſus fibrarum ordinis ſecundi per inferiorem cordis ſuperficiem, earumque inſertio, eſt. Conſideremus iam ſpeciatim ſingulorum funium continuationes.

In ſpecie funiculorum.

Funiculi, ſeu primae fibrae ordinis ſecundi *b*), dum ſuper gibboſam ventriculi, poſtremamque marginis, partem tranſeundo in inferiori ſuperficie apparent *c*), ductu deſcendendo longitudinali, variis modis et diuiduntur et confluunt *d*), vt interſtitia efficiant, fibrillis repleta *e*). Denique magis magisque concurrendo in paucas fibras abeunt, quibus in poſteriorem partem funiculi terminalis inferioris inſeruntur *f*), praecedentibus fibris *g*), ab interſtitio inter fila cartilaginea ſiniſtra productis *h*), ad vltimas ordinis primi fibras *i*) partim applicatis *k*), partim vna cum illis in ipſum principium faſciculi inſertis *l*).

Fibra-

a) Tab. IV. 101.
b) Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50.
c) Tab. VI. 13. 14.
d) Tab. VI. 57. 59. 62.
e) Tab. VI. 61. 62.
f) Tab. VI. 53.
g) Tab. VI. 52.
h) Tab. VI. 51.
i) Tab. VI. 46.
k) Tab. VI. 52.
l) Tab. VI. 52.

Fibrarum funis magni.

Fibrae, ex fune magno a) resoluto continuatae *b*), simplices longae fibrae in inferiorem prodeunt superficiem *c*). Eaedemque fibrae continuant *d*) arcuatim et conformiter margini vsque ad fasciculum terminalem inferiorem, in eiusque mediam partem inseruntur *e*).

Fibrarum funis ramificati.

Fibrae, a ramificato f) productae fune *g*), similes in inferiori superficie, dum transeunt in eam, longae, aequales fibrae apparent *h*), simili continuatae ductu ad terminalem vsque fasciculum inferiorem, in cuius partem, quasi quartam aut quintam, haud procul ab extremitate anteriori, inseruntur *i*). Distinguuntur hae fibrae in margine, et in inferiorem superficiem dum intrant, insigni interstitio, fibrillis repleto, tum posterius a fibris funis magni *k*), tum anterius a sequentibus applicati funis fibris *l*).

Fibrarum funis applicati.

Denique *fibrae, ex fune applicato m*) continuatae *n*), pariter aequales, simplices, longae, dum prodeunt in inferiorem

---

a) Tab. IV. 51. 52.
b) Tab. IV. 54. 55. 56.
c) Tab. VI. 15. 16.
d) Tab. VI. 66. 67.
e) Tab. VI. 68. 69.
f) Tab. IV. 60. 61. 62.
g) Tab. IV. 61. 62.
h) Tab. VI. 18. 19.
i) Tab. VI. 72.
k) Tab. VI. 17.
l) Tab. VI. 20.
m) Tab. IV. 65.
n) Tab. IV. 70. 71.

rem ſuperficiem, apparent *a*), ſimilique, margini conformi, ductu, paulisper magis transuerſo, ea procedunt ratione, vt primae earum in praecedentis funis ramificati fibras *b*), vltimae tandem in finem anteriorem, ſeu ſuperiorem, fasciculi terminalis inferioris inſerantur *c*). Etiam hae fibrae tum a praecedentibus, tum a ſequentibus, fibris interſtitiis *d*) diſtinctae ſunt.

Confirmatio fibrarum ordinis tertii.

Vti ſingulae dextri ventriculi fasciae, ordinesque hactenus ſiniſtri, primus atque ſecundus, vti deſcripti erant ex corde primo, in hoc ſecundo corde, ſicuti et in reliquis, quae poſtea inquiſiui, ſimiles omnino et confirmati reperti ſunt; ſic *tertius quoque* et *quartus fibrarum* ventriculi ſiniſtri *ordo* in hoc, vti in primo corde ſe habent; modo vt accuratius has fibras omnes in hoc ſecundo corde inquiſiuerim, multaque noua, in primo praeteruiſa, aut neglecta, detexerim. Tertii ergo ordinis fibrae, ex pontis regione productae, continuatae oblique ad marginem, ad evndemque ſecundum longitudinem progredientes verſus apicem cordis, et prope eum inſertae, in vno atque in altero corde ſe ſimili modo habent *e*). Verum diſpoſitio omnium fibrarum huius ordinis, earum decurſus et inſertio tam multa habent ſingularia, quae in primo corde non perceperam, quaeque hunc ordinem multo accuratius definiunt, a vicinisque ſecundi et quarti ordinis fibris diſtinguunt, vt novam deſcriptionem omnino mereantur.

 Ea-

a) Tab. VI. 21. 22.
b) Tab. VI 74. a.
c) Tab. VI 75.
d) Tab. VI. 20. 23.
e) Tab. I. 82. 87. 85. 84. 88. 85. 86.
Tab. IV. 73. 73. 74. 75. 77. 78. 79. 81, 82.

Earum descriptio noua. Funiculus procurrens longus.

Oriuntur hae *tertii ordinis fibrae*, vti recte dictum erat in priori descriptione, a fibris, ex pontis regione productis, quibus funis porro applicatus *a*) aliqua sui parte *b*) accedit. Progrediuntur quoque oblique marginem versus *c*). Tunc vero minime transeunt super marginem, nec tangunt inferiorem superficiem, quam prorsus fibrae ordinis secundi occupant replentque. Verum datur in iis fasciculus teretiusculus, ex primis pontis fibris et accedente funis applicati portione productus, qui prima pars est ordinis tertii, eumque a secundo ordine distinguit, notabilis omni respectu *d*). Hic, ortus a crena continuo sub cono arterioso et ex prima parte pontis ipsius, qua margo eius posterior efficitur, et cui tum portio applicati accedit *e*), descendit inde, conformis ductui funium, oblique sinistrorsum antrorsum ad marginem *f*), funes a fibris tertii ordinis distinguendo. Sic ex planiori et latiori sensim angustior et teretior fasciculus factus, vbi ad marginem peruenit, recta antrorsum versus apicem curuatus in ipso eo margine sinistro crasso ventriculi, propior superiori superficiei primo, deinde sensim versus inferiorem inclinando, progreditur *g*), et continuat in eo vsque ad apicem ventriculi, vbi in extremitatem superiorem fasciculi terminalis inferioris *h*) inseritur *i*). Vti longissimus hic funiculus omnium fibrarum ordinis tertii ad apicem ventriculi vsque continuat, cum ceterae huius ordinis fibrae nonnisi ad

---

a) Tab. I. 82. 83. Tab. IV. 65. 66.
b) Tab. IV. 69. 72.
c) Tab. I. 84. 88. Tab. IV. 75. 77. 79. 82.
d) Tab. IV. 73. 73. 73. 74. 74.
e) Tab. IV. 73. 66. Tab. I. 82. 87.
f) Tab. IV. 73. 73.
g) Tab. IV. 74. 74.
h) Tab. IV. 104.
i) Tab. IV. 105.

ad marginem vsque perueniant, *procurrentem* illum *funiculum* vocari posse censeo. Cum vero et alius, omnino similis, in ordine quarto detur, breuior, at pariter ad apicem ventriculi tamen vsque procurrens *a*); *longus* ille, seu *maior*, hic *breuis*, seu *minor*, appellabitur.

Fibrae reliquae. Diuisio crenae.

Reliquae fibrae ordinis tertii, a reliqua parte pontis *b*), et quae porro a ponte sequitur, crenae parte, ad procurrentem breuem vsque *c*), oriuntur. Quum in aliis cordibus, vbi duplex pons fuit, secundus eam crenae partem occupare soleat; *regionem pontis* totam hanc crenae partem quam pons occupat, et quae porro post pontem ad procurrentem breuem vsque sequitur *d*), appellare conuenit; vt fibrae ergo ordinis tertii ex pontis regione generatim oriantur. Quamuis nec longum nec breuem procurrentem funiculum in corde primo obseruaueram, nihil tamen facilius fuit, quam cognoscere vtrumque in icone, modo vt continuationes eorum ad marginem ventriculi non sint expressae, quae, vt appareant in eo, omnino necesse est, vt oblique paulisper a latere sinistro cor intuearis. Longus ergo procurrens funiculus in corde primo, quo vsque in superiori superficie versatur, ille est, quem fibrae efficiunt pontis primae cum accedente fune applicato *e*), ad marginem vsque continuatae. Breuis procul dubio, qui fibris producitur *f*), ex ea parte crenae ortis, in quam fibrae angulares ex dextro ventriculo

---

a) Tab. IV. 83. 84. 85.
b) Tab. IV. 76. Tab. I. 87.
c) Tab. IV. 78. 79.
d) Tab. IV. D. H. Tab. I. L. 21.
e) Tab. I. 82. 87. 84.
f) Tab. I. 94. 96. 95.

culo inferuntur *a*). Sic pontis regio ergo in corde priori ea eſt, quae inter vtrumque funiculum continetur *b*). Quum et procurrentes funiculos et dictam pontis regionem conſtanter in cordibus, quae inquiſiui, repererim; tota crena in tres partes conſtanter diuiſa eſt, quarum prima, *poſtrema*, ea eſt, quae marginem coni arterioſi ſiniſtrum efficit *c*), quae exigua in primo corde, in plerisque pollicem ſaltim longa, in hoc inſigni longitudine non modo, ſed propterea quoque notabilis exiſtit, quod eleuato cono ſuperficies ventriculi ſiniſtri ſuperior *d*) non in dextri ventriculi, ſed in ſepti ſuperficiem dextram *e*), per hanc crenae partem continuat. Huic ſolus applicatus funis latere ſuo adhaerere ſolet *f*), nec aliae fibrae ab ea parte crenae oriuntur. Terminatur anterius ponte et procurrente funiculo longo *g*). Secunda pars crenae *media* eſt, ſeu *regio pontis*, quae pontem, ſi quis exiſtit, aut, ſi duo ſunt, ambos, et reliquam partem crenae ad funiculum procurrentem breuem vsque, complectitur *h*). Haec fibris latis ventriculi dextri, pulmonalibus, interiectis et fasciae magnae, ſaepius quoque parti angularium reſpondere ſolet. Ordo fibrarum tertius ab ea crenae parte oritur. Terminatur anterius funiculo breui. Tertia pars crenae *anterior* eſt, ſeu *regio radiata i*). Haec tenuibus ventralibus fibris ventriculi dextri reſpondet. Incipit a procurrente breui, quem ipſum complectitur, extendit ſe vsque ad valleculam. Ex hac quartus ordo fibrarum oritur.

Fibra-

a) Tab. I. 20. 22. 28.
b) Tab. I. 87. 17. 17. 17, 21.
c) Tab. I. C. L. Tab. IV. C. D.
d) Tab. V. 48. u.
e) Tab. V. 52. 54. v.
f) Tab. V. 48.
g) Tab. IV. x. 72 73.
h) Tab. I. L. 87. 17. 17. 17. 21. Tab. IV D. 73. 75. 79.
i) Tab. I. 94. 96. 97. 99. D. Tab. IV. 83. 85. 90. 95. E.

Fibrarum tertii ordinis ortus, progreſſus, inſertio.

Itaque ex tota pontis regione fibrae ordinis tertii oriuntur, ea ratione, vt ex primis fibris pontis ipſius, quibus et aliqua applicati funis portio accedit, procurrens longus, ceterae fibrae ex ſequenti reliqua pontis regione producantur. Procurrens, vti dictum eſt, ad marginem ventriculi ſiniſtri ſecundum longitudinem progreditur, et prope apicem in extremitatem ſuperiorem terminalis faſciculi inferioris ſe inſerit. Reliquae fibrae analogo ductu cum procurrente longo per ſuperiorem ſuperficiem ventriculi progrediuntur ad marginem vsque *a*). Ibi in procurrentem longum incurrunt *b*). Videntur terminari et inſeri in eum funiculum, ſicuti id ſolitum fuit in fibris ventriculi dextri. Verum probabile potius eſt, continuare ſub procurrentem, ita tamen, vt ſe ſub illo recipiant quidem, at, curuatae pari modo, in inferiorem ſuperficiem minime tranſeant, ſed ſub procurrente apicem verſus progrediantur, ſub eoque confluentes primo inter ſe, denique in finem procurrentis tamen tranſeant, cum eoque in terminalem inferiorem inſerantur. Sic enim in pluribus aliis exemplis fibrarum ventriculi ſiniſtri, imprimis in ordine quarto, explorando rem ſe habere inueni. Dum in procurrentem longum hae fibrae tertii ordinis in ſuperiori ſuperficie incurrunt, ea directione feruntur, vt aliae ad illum oblique ſe applicare *c*), aliae, confluendo inter ſe, acuto communi fine in ipſum angulum inter procurrentem longum et breuem *d*) ſe inſerere *e*), videantur. In aliis cordibus ita etiam vltimas fibras ordinis tertii procedere vidi, vt ad procurrentem breuem a tergo ſe applicare vide-

a) Tab. I. 89. 89. 90. Tab. IV. 75. 77. 79.
b) Tab. IV. 75. 77. 78. 79. 81. 82.
c) Tab. IV. 77. 78.
d) Tab. IV. 74. 87.
e) Tab. IV. 81. 82.

derentur. Semper tamen se recipiunt sub procurrentes, & confluendo inter se communi fine demum in procurrentem longum se inserunt.

Confirmatio ordinis quarti fibrarum.

Fibrae ordinis quarti, seu *fibrae radiatae* superiores, ortae a tertia parte crenae anteriori, seu regione radiata *a*), concurrentes inde radiatim versus marginem *b*), insertae in focum superiorem, qui et apex ventriculi sinistri est *c*), in vno atque in altero corde, sicut in reliquis, quae vidi, reperiuntur *d*).

Eiusdem ordinis descriptio noua. Procurrens breuis.

Vti vero tertius ordo fibrarum suum procurrentem funiculum habet, quo a secundo fibrarum ordine distinguitur, quo terminatur ad marginem ventriculi, et in quem denique fibrae eius omnes inseruntur; sic suo quartus pariter ordo instructus est *funiculo procurrente*, qui hunc ordinem a tertio distinguit, ad marginem eundem terminat, et fibras huius ordinis omnes recipit *e*). Quamuis in primo corde hunc funiculum non perceperim, neque ad finem vsque pinxerim in icone; omnibus notis tamen in ea cognoscitur, et ab aliis fibris distinguitur *f*). Breuior est procurrente ordinis tertii, cum propior apici a crena oriatur, et in eundem tamen apicem iuxta priorem inseratur. Biceps plerumque, aut capite tamen instructus latiori, esse solet, ex quo, magis magisque attenuatus, in

---

a) Tab. I. 96. 97. 99. 102. D. Tab. IV. 85. 92. 98. E.
b) Tab. I. 95. 98. 100. 103. 104. Tab. IV. 87. 91. 93. 96.
c) Tab. I. E. Tab. IV. T.
d) Tab. I. 96. 97. --- 104 --- E. Tab. IV. 83. 85 --- 98 --- T.
e) Tab. IV. 83. 84. 85. 87. 88. 88. 101.
f) Tab. I. 94. 96. 95.

in caudam curuatam tandem desinit. Oritur duobus in hoc corde capitibus, posteriori altero *a*), altero anteriori *b*), fibris breuibus nectentibus *c*) inter se coniunctis, a parte crenae anteriori, siue radiata, proxime post regionem pontis. Id vero propius apici in aliis cordibus est, in aliis, velut in hocce, magis ab eo remotum; provt regio radiata maior aut minor est. Solet tamen haec regio ventralibus fibris ventriculi dextri *d*), et procurrens funiculus principiis suis angularium fibrarum insertioni *e*), respondere; vt funiculus procurrens breuis ab ea parte crenae oriatur, in quam vltimae fibrae latae se inserunt, reliquae fibrae ordinis quarti ab ea originem ducant, quam tenues ventriculi dextri fibrae sua insertione occupant. Sic in hoc corde *f*) et in priore *g*) se res habet. Hinc orta bina principia procurrentis oblique versus marginem et apicem ventriculi progrediuntur, et coniuncta in vnum funiculum confluunt *h*), qui, magis magisque tenuior teretiorque factus, curvatus ad marginem demum venit *i*) et ad procurrentem longum *k*), qui secundum longitudinem per totam hanc regionem marginem ventriculi percurrit, fibrasque omnes tertii et quarti ordinis ab inferiori superficie, fibrisque, quae eam occupant, secundi et primi ordinis, separat. Ei se longo procurrenti funiculo breuis adiungit, cum eoque vna per reliquam partem mar-

a) Tab. IV. 83.
b) Tab IV. 85.
c) Tab. IV. 86.
d) Tab. IV. 31. 41.
e) Tab. IV. 27. 28.
f) Tab. IV. 28. 83. 85.
g) Tab. I. 28. 94. 96.
h) Tab. IV. 87.
i) Tab IV. 88.
k) Tab. IV. 74.

marginis ad apicem vsque *a*) progreditur. Ibi extremitate finitur vnciformi *b*), fimili omnino et aequali vnco illi, quem fua extremitate fasciculus format terminalis fuperior *c*); eoque vnco contra vncum fasciculi ea ratione pofitus eft procurrens, vt terminalis a parte fuperiori deorfum in procurrentis, procurrens ab inferiori furfum in terminalis, extremitatem vncum fuum demittat, alterque in alterius fe extremitatem inferat, et duobus his vncis vterque circulum efficiat completum, exiguum, cuius centrum foueola eft, minima quidem, verum diftincta, manifefta, rotunda *d*). Haec foueola in ipfo manifefto apice ventriculi finiftri fita eft. Dixeram in defcriptione fibrarum externarum ventriculi finiftri hoc punctum, in quod fibras radiatim contendere videbam, focum fuperiorem; haud fatis recte id tamen. In fequentibus hanc ftructuram accuratius defcribam.

Reliquae ordinis quarti fibrae.

Reliquae fibrae ordinis quarti, *fibrae radiatae*, a reliqua anteriori parte crenae ad valleculam vsque *e*) oriuntur. Arcuatim inde et radiatim verfus marginem primo, et, qui eum occupat, funiculum procurrentem breuem, deinde verfus apicem fimul quoque concurrunt *f*), omnesque, mediate vel immediate, demum in procurrentem breuem inferuntur; ficut tertii ordinis fibrae in longum inferebantur funiculum. Verum nec fimili modo progrediuntur omnes, nec inferuntur in breuem. Aliae nimirum directe magis tranfeunt in eum *g*), aliae iuxta

a) Tab. IV. 101. 105.
b) Tab. IV. 101.
c) Tab. IV. 100.
d) Tab. IV. 102.
e) Tab. IV. 89. 92. 98.
f) Tab. IV. 90. 91. 95. 96.
g) Tab. IV. 89. 90. 91.

iuxta eundem, curuatae, procurrunt aliquantum, et propius extremitati demum inſeruntur *a*). Atque iſtae quidem tum alias in ſe rurſum recipiunt *b*). In hoc quidem corde primae fibrae *c*) immediate in procurrentem tranſeunt. Tum vero fibra ſequitur longa tenuis *d*), iuxta procurrentem curuata, in eumque demum inſerta. In hanc fibram aliae quaedam ſequentium fibrarum *e*) inſeruntur, eiusque ope demum ad procurrentem perueniunt. Alia deinde ſimilis longa tenuis fibra, a crena orta, ad procurrentem curuata, ſequitur, propius extremitati in eum inſerta *f*), in quam quaedam ſequentium fibrarum ſe denuo immittunt, eiusque ope in procurrentem inſeruntur *g*). Denique tertia et vltima fibra longa ex media fere regione radiata crenae oritur *h*), pariter curuata, et in procurrentem inſerta *i*). In eam reliquae radiatae fibrae omnes ad valleculam vsque *k*) transuerſim fere incurrunt, per eamque in procurrentem inſeruntur. Elegantiorem fere fibrarum radiatarum ſtructuram in aliis cordibus vidi et magis regularem. Procurrens breuis, ſolito modo diſtinctus, ad apicem ventriculi productus, vnco ſuo ad vncum terminalis ſuperioris applicatus eſt, vt bini funiculi his vncis ſuis circulum formarent integrum, et foueolam includerent, ſolito modo rotundam. Ceterae fibrae omnes ordinis quarti pennatim ad illum funiculum procurrentem tranſeunt ea ratione, vt primae deſcendendo oblique, mediae ſenſim trans-

 verſim

a) Tab. IV. 98.
b) Tab. IV. 96. 97. 98.
c) Tab. IV. 89. 90.
d) Tab. IV. 93. 93.
e) Tab. IV. 92.
f) Tab. IV. 94.
g) Tab. IV. 94.
h) Tab. IV. 95.
i) Tab. IV. 96.
k) Tab. IV. 97. 98.

versim progrediendo, vltimae demum adscendendo, radiatam quodammodo figuram efficerent, excepta vna sola fibra, caeteris crassiori, mediam fere partem inter eas occupante, quae, vbi ad procurrentem fasciculum venit, iuxta eum curuata continuat fere ad extremitatem vsque, in quam se inserit. Quae priores hae fibrae a crena oriuntur, in funiculum pennatim et arcuatim transeunt ipsum; quae post eam, propiores apici, oriuntur, in eam fibram transeunt simili modo, cum eaque in extremitatem funiculi inseruntur. Caeterum recipiunt se hae fibrae sub procurrentem breuem, simili prorsus modo, vt fibras se recipere monui tertii ordinis sub procurrentem longum. Tum pariter vero curuatae illae versus apicem, tectae suo procurrente, aliquantum continuant, et confluendo inter se denique tamen in eum procurrentem inseruntur.

Figura radiata superior eiusque focus.

Sic illa *figura radiata superior* formatur, cuius nonnisi imperfectam imaginem in prima descriptione exhibui. Ea ergo radiata vocari potest, quatenus curuatae fibrae ad procurrentem concurrunt, sub eoque aliquantum continuant et angulis demum acutis in eum inseruntur. Vti vero minime in vnum punctum singulae conueniunt, sed in procurrentem, qui lineam curuam exprimit, inseruntur, *pennatae* quoque aut mediae inter pennatas et radiatas, vocari merentur. Tum porro vero in singulis, quae vidi, cordibus vel vna, vel duae, vel tres fibrae dantur inter radiatas, quae, ceteris longiores, ad aliquod spatium iuxta procurrentem funiculum progrediuntur, antequam in eum se inserant *a*). Hae vti proxime sequentes fibras prohibent, quo minus ad procurrentem immediate pervenire possint, has fibras recipiunt ipsae *b*), vt tanquam rami ergo

a) Tab. IV. 93. 93 — 94 — 95 96.
b) Tab. IV. 97. 98.

ergo illae longiores fibrae funiculi procurrentis confiderari posfint. *Pennata* ergo et *ramificata* fimul figura ea radiata eft, quam fibrae fuo ductu in fuperiori fuperficie circa apicem exprimunt; vt funiculus procurrens ipfe tanquam truncus, feu penna primaria, fibrae longiores, quae alias breuiores fibras recipiunt, vt rami, feu fecundariae pennae, confiderari poffint. Tres nempe eiusmodi pennae fecundariae in hoc corde obfervantur *a*). Nonnifi vnam in aliis, mediam regionis radiatae fedem occupantem, reperi. Si *focum* ergo dixeris concurfum fibrarum radiatarum, patet eum effe ad marginem dextrum concauum procurrentis funiculi breuis *b*), et ad fibras longiores, funiculi ramos; et *focum* proinde *lineis exprimi curuatis* concurrentibus; vt *focus* ergo *linearis* fit et *ramificatus*. Alia fcilicet figura radiata, aliusue fibrarum concurfus et alius focus, in fuperiori fuperficie ventriculi finiftri non datur.

Figura radiata inferior et focus eius.

Similique modo cum *figura radiata inferiori* comparatum eft. Haec finibus formatur fibrarum ordinis fecundi, quae ex maiori ambitus parte ad marginem finiftrum *c*) in anguftius fpatium ad funiculum terminalem inferiorem *d*), proinde radiatim, concurrunt, et extremitatibus porro fibrarum ordinis tertii *e*), ad procurrentem funiculum longum *f*) collectis, eiusque ope in extremitatem funiculi eiusdem terminalis inferioris fuperiorem *g*), iuxta vltimas praecedentium fibrarum fe-

 cundi

a) Tab. IV. 93 93 — 94 — 95. 96.
b) Tab. IV. 87. 88. 88
c) Tab. VI. 13. 22.
d) Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75.
e) Tab. VI. 24. 25.
f) Tab. VI. 24. 76.
g) Tab. VI. 76.

cundi ordinis, *a*) infertis. Pariter ergo hae fibrae radiatae inferiores, ac fuperiores, pennatae funt, et figura, quam efficiunt, radiata pennata, et focus ad marginem finiftrum funiculi terminalis inferioris lineam exprimit, parum curuatam. Neque defunt inter has fibras radiatas aliae longiores, ad terminalem funiculum peruenientes, in eamque infertae *b*), aliaeque breuiores, in illas longiores infertae *c*), nec nifi harum longarum ope ad funiculum terminalem peruenientes *d*). Sic totus ordo tertius fibrarum ad procurrentem longum concurrit eiusque ope ad terminalem peruenit *e*). Sic aliae quoque ex fecundo ordine *f*) in fuo itinere confluunt *g*). Et *focus* ergo *inferior* pariter atque fuperior *ramificatus* eft, vt funiculus terminalis inferior tanquam truncus, funiculus procurrens longus imprimis vt ramus illius confiderari poffit, in quem, ficuti in truncum ipfum fecundus ordo fibrarum, tertius fibrarum ordo inferatur, cum eoque tandem ad funiculum terminalem ipfum perueniat.

Centrum focorum commune.

Iam vero funiculus terminalis inferior minime truncus eft fibrarum, quae in eum inferuntur, et qui non porro in alium infereretur. In fuperiorem ifte vna cum medio fe inferit *h*) proxime ad extremitatem illius, qua vncum producit, vnco procurrentis minoris *i*) applicatum. Is ergo fuperior fafciculus

a) Tab. VI. 75.
b) Tab. VI. 72. 76.
c) Tab. VI. 73. 74. 75.
d) Tab. VI 72.
e) Tab. VI. 76. Tab. IV. 105.
f) Tab. VI. 54. 59.
g) Tab. VI. 62. 65. 60.
h) Tab. IV. 104.
i) Tab. IV. 100.

culus terminalis truncus eſt vltimus, ad quem omnes tandem fibrae, quae in inferiorem inſeruntur, fibrae ſecundi et tertii ordinis, recurrunt. Primarii huius rami ſunt terminalis medius et inferior *a*). Et inferior tum porro fibras recipit dictas omnes ſecundi et tertii ordinis. Quodſi nunc porro ad finem faſciculi terminalis ſuperioris, ſicuti et ad procurrentis funiculi breuis finem, qui quippe truncus eſt vltimus fibrarum ordinis quarti, animum attendimus, hos ambos truncos in ſe mutuo patuit inſertos eſſe extremitatibus ſuis vnciformibus *b*). Vt fibrae ergo omnes ordinis quarti in extremitatem vltimam fibrarum ſecundi et tertii ordinis et fibrae viciſſim ſecundi et tertii ordinis omnes in vltimam fibrarum ordinis quarti extremitatem ſe inſerant. Circulus ergo ille, quem vncis ſuis efficiunt funiculi, terminalis ſuperior et procurrens breuis, et foveola, quam circulus includit *c*), commune punctum inſertionis ſunt omnium fibrarum ſecundi, tertii et quarti ordinis, et *centrum commune focorum*, in quos illae fibrae colliguntur. Solus primus ordo ergo fibrarum ventriculi ſiniſtri totam ſtriam ſua inſertione occupat, reliqui tres ordines in focos primo quidem ſuos, ſecundus et tertius in inferiorem, quartus in ſuperiorem, deinde his focis vero porro in vnum punctum, centrum focorum commune, tandem tranſeunt.

Centri communis ſedes.

Sedes centri communis in ipſo ventriculi margine eſt, et in media craſſitiei eius parte. Vt repraeſentare illud poſſem in icone, parietem ventriculi ſuperiorem, cum eoque vna marginem in ſede, propinqua apici, verſus crenam et baſin obli-
que

---

a) Tab. IV. 103. 104.
b) Tab. IV. 102. 100. 101.
c) Tab. IV. 100. 101. T.

que retrorſum paulisper attraxi, cum ſuperiorem pingerem ſuperficiem; verſus ſtriam contra oblique et baſin inferiorem cum margine ſuperficiem coegi, cum inferiorem delinearem. Sic in vtraque ſuperficie, et in quauis, quomodo cum ceteris fibris eius ſuperficiei cohaereat, repraeſentatum eſt centrum commune focorum *a*). Vera ſedes interim in ipſo margine eſt, et in ea quidem eius parte, vbi bini diſtincti ventriculi margines, ſiniſter *b*) et anterior *c*), concurrunt, in qua ſede apex quoque ventriculi tum ductu fibrarum, tum marginum concurſu, formatur.

Sedes focorum.

Focus ſuperior cum ea procurrentis faſciculi minoris parte, ad quam fibrae concurrunt, focumque efficiunt, in margine ſiniſtro, vltimaque eius parte, apici propinqua, ea quidem ratione, ſitus eſt, vt procurrens ad marginem iam, focus ipſe, ſeu concurſus fibrarum, ad ſuperficiem potius ſuperiorem ſit referendus; procurrens tamen in margine proximus ſuperficiei ſuperiori, focus in ſuperficie propinquus margini, ſit. Focus inferior cum funiculo terminali inferiori, in quem fibrae concurrunt, in margine anteriori, quem totum focus quoad longitudinem occupat, collocatus exiſtit, ea ratione, vt faſciculus terminalis ad marginem pariter, extremitates fibrarum ad ſuperficiem pertineant inferiorem, faſciculus tamen proximus ſit inferiori ſuperficiei. Focus ergo ſuperior in margine ſiniſtro, propior ſuperficiei ſuperiori; inferior in anteriori margine, inferiori propior ſuperficiei; et centrum commune in vtriusque marginis concurſu, ſeu apice ventriculi, eiusque in media reſpectu craſſitiei parte exiſtit.

Qua-

a) Tab. IV. 102. Tab. VI. 80.
b) Tab. IV Q. T. Tab. VI. 13. 80.
c) Tab. IV. T. E. Tab. VI. 80. 4.

Quatuor fibrarum ventriculi finiſtri externarum ordines dantur et tres praeterea faſciculi terminales.

Sic quatuor ergo ordines dantur fibrarum in ſtrato externo ventriculi ſiniſtri. Fibrae nimirum ordinis primi, quae, ortae a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, inſeruntur in ſtriam. Fibrae ordinis ſecundi, quae, ortae a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, in faſciculum inſeruntur terminalem inferiorem. Fibrae ordinis tertii, quae, ortae a media parte crenae, inſeruntur in faſciculum eundem, formando cum ordine fibrarum ſecundo focum inferiorem. Fibrae ordinis quarti, quae, a radiata parte crenae ortae, in vncum communi extremitate inſeruntur faſciculi terminalis ſuperioris, ſuperiorem formando focum. Vt ordines autem illi determinati non modo ſinguli ortu ſuarum fibrarum et ductu et fine, ſed ita completi quoque ſunt in ſedibus ſuis, vt nulla alia fibra, ab alia parte orta, in aliam inſerta, iis accenſeri poſſit; aut quintum ordinem faſciculi efficiunt terminales, omnibus notis diſſimilem prioribus, aut ad nullum tamen priorum ordinum referri faſciculi illi poſſunt. Vt quatuor ergo fibrarum ordinibus ſtratum externum ventriculi ſiniſtri et tribus praeterea faſciculis terminalibus conſtet.

EXPICATIO

Tabulae VI.

Eiusdem cordis (Tab. IV et V.) fibrae externae in ſuperficie inferiori. Ventriculi ſiniſtri apex, paulisper in ſuperficiem repraeſentatam retractus, vt centrum commune focorum, extremitatesque funiculorum procurrentium cum aliqua parte fibrarum, in illos inſertarum (24. 76. 29.), appareant.

A. Ventriculus ſiniſter.
B. Dexter.

C. Stria, fibris facta superficialibus, superstratis, passim inter se confluentibus, sicut ex singularum demonstratione patebit. (Tab. III. D. C.)

D. E. F. G. Sinus sinister. Eius paries posterior.

D. Margo sinister seu latus sinistrum. (Tab. IV. *h.* auricula in situm naturalem reflexa.).

E. Regio insertionis venae cauae inferioris orificio suo sinistro, nunc obturato.

F. Basis parietis posterioris, qua filo cartilagineo posteriori sinistro insidet.

G. Margo, seu superficies puluinata, superior.

H. Vena pulmonalis sinistra anterior.

I. Vena pulmonalis sinistra posterior.

K. Vena pulmonalis dextra anterior.

L. Dextra posterior.

M. Sinus dexter. Eius latus dextrum.

N. Parietis posterioris basis qua filo insidet sinus cartilagineo posteriori dextro.

O. Vena caua inferior.

P. Vena caua superior.

Q. Q. Arteria pulmonalis sinistra.

R. Arteria pulmonalis dextra.

S. Pars arcus aortae, bisurcationi arteriae pulmonalis interposita.

T. Arcus aortae.

V. Arteria innominata.

W. Arteria subclauia dextra.

X. Carotis dextra.

Y.

Y. Carotis ſiniſtra.

Z. Arteria ſubclauia ſiniſtra.

a. Spelunca poſterior, ſeu apertura poſterior canalis inter ſinum dextrum et ſiniſtrum. (Tab. III. 5.).

b. Truncus filorum cartilagineorum poſteriorum. (Tab. III. 4.)

c. Filum cartilagineum poſterius ſiniſtrum. (Tab. III. *y.*).

d. Filum cartilagineum poſterius dextrum. (Tab. III. 2.).

e. Fibra ſtriae a parte dexteriori prima, prorſus in hoc corde a caeteris ſeparata, nec obſcure naturam indicans harum fibrarum. Oritur a filo cartilagineo poſteriori dextro. Superſtrata proximis fibris ventriculi dextri (82. 83. *h.* 89.), vt facile ab iis ſolui poſſit, nec niſi leviter adhaereat, in duos finditur ramos (*f. g.*), qui in ipſas continuant dextri ventriculi fibras, vicinis intermixtas.

f. Ramus huius fibrae alter, qui in fibras (90) continuat.

g. Alter ramus in fibras ad (B.) continuans.

h. Pars fibrarum ventriculi dextri (89.) qua ſub fibra (*i. k.*) ex profundioribus fibris ſtriae (*n. n.*) illae (89. *h.*) oriuntur.

i. k. Fibra ſtriae in hoc corde ſecunda, longior, pluribus transuerſis ventriculi dextri fibris ſuperſtrata, denique et ipſa in eiusmodi transuerſas dextri reſoluta.

i. Duae, quibus a filo oritur, eius radices.

k. Fibra ipſa ex binis nata.

l. Portio huius fibrae, reſoluta in transuerſas ventriculi dextri (92.) Reliqua fibrae portio in fibras (93.) reſoluta.

n. n. Fibra ſtriae profundior, ex qua fibrae transuerſae (*h.* 89.) et porro illae (90) produci videntur.

o. Alia fibra ſtriae ſublimis, facile ſolubilis.

p. Vbi haec fibra cum illa (*k*) confluit.

q. Inſula, quam confluendo fibrae ſtriae efficiunt, vbi profundiores apparent fibrae.

r. s. Duae aliae fibrae ſiniſteriores, a filo ortae cartilagineo poſteriori ſiniſtro.

t. Ramulus anaſtomoticus, quo fibrae (*r. s.*) cum fibra (*o*) coniunguntur.

v. Alia inſula.

w. Continuatio fibrarum (*r. s.*) per ſtriam.

x. Earundem continuatio in fibras ventriculi dextri.

y. Vltima, quae in hoc corde ad ſtriam referri poteſt fibra, a filo cartilagineo ſiniſtro orta.

z. Eius per ſtriam continuatio.

1. Eiusdem porro in fibras ventriculi dextri continuatio.

2. 3. Reliquae ſiniſterioris portionis ſtriae, ex fibris ventriculi ſiniſtri continuatis ortae, continuatio in fibras ventriculi dextri.

4. 5. Faſciculus terminalis inferior (Tab. IV. 104.)

4. Eius ortus a fine ſtriae, fibris carneis quidem, at quae fere ſubtendineſcentes videntur, innatae firmiter in hac ſede carni cordis et profunde, vt ad internam ventriculi ſuperficiem vsque implantatae fibrae eſſe videantur.

5. Eius finis, quo fibrae in medium faſciculum (6. 7.) inſeruntur.

6. 7. Faſciculus terminalis medius (Tab. IV. 103.).

6. Eius ortus ſimiliter fibris profundis ſub prioribus (4.) et iuxta faſciculum (98.), quocum vna, fibris tamen vnius faſci-

fasciculi ab alterius fibris separatis, emergere videtur. Nimirum tenuis in his sedibus paries ventriculi est, et ab interna huius superficie funiculi ambo omnino oriuntur, columnas tamen, ex quibus continuarentur, non reperi.

7. Eius insertio in fasciculum terminalem superiorem.

8. Fasciculus terminalis superior, (Tab. IV. 99.) Ortus a latere fasciculi (98.), insertus vnco suo (79.) in procurrentem breuem (78.) (Tab. IV. 100. 101.). In hunc fasciculum terminalem superiorem ergo medius et inferior inseruntur; in inferiorem autem porro fibrae omnes ordinis secundi et tertii (53. 55. 68. 69. 72.75.).

9. 10. 11. 12. F. C. Fibrae ordinis primi, a filo posteriori (F.) ortae, in striam (C. 12.) insertae.

13. 14. 15. 16. 18. 19. 21. 22. 53. 55. 68. 69. 72. 75. Fibrae ordinis secundi seu fibrae funium.

24. 25. 76. Fines fibrarum ordinis tertii.

24. 76. Procurrens longus (Tab. IV. 73. 74. 74).

25. Vltimae fibrae ordinis tertii in eum insertae (Tab. IV. 82.). Hae fibrae in situ naturali in hac superficie prorsus non apparent. Procurrens longus ipse, qua parte apparet, ipsum marginem in situ naturali occupat, in eoque superficiem inferiorem intuenti apparet. Eadem vero parte superiorem intuenti minime apparet.

27. 28. 29. 78. Portio fibrarum ordinis quarti, (Tab. IV. 94. 96.) quae pariter in hac superficie in situ fibrarum naturali non apparent.

Sic fibrae ordinis primi (9. 10. 11. 12. F. C.) in striam; fibrae ordinis secundi (13. etc. 22. et 53.

 etc.

etc. ad 75.) et tertii ordinis fibrae (24. 25. 76.) in fasciculum terminalem inferiorem, focum formando inferiorem; quarti demum ordinis fibrae in procurrentem minorem, superiorem focum formando, inferuntur. Vt fasciculi ergo terminales supersint in strato externo ventriculi sinistri, qui ad nullum horum ordinum referri possunt, sed singulares huius ventriculi fasciculos efficiunt.

13. 14. Funiculi, seu primae fibrae ordinis secundi (Tab. IV. 46. 47. 48. 49. 50.)

15. 16. Fibrae ex fune magno (Tab. IV. 51. 52.), resoluto, continuatae (Tab. IV. 54. 55. 56.).

17. Interstitium notabile, fibrillis repletum.

18. 19. Continuatio fibrarum, in quas funis ramificatus (Tab. IV. 60. 61. 62.) fere resoluitur (Tab. IV. 61. 62.)

20. Interstitium inter has fibras simile longum, fissuram referens, fibrillis repletum.

21. 22. Continuatio fibrarum funis applicati (Tab. IV. 65. 70. 71.).

23. Simile interstitium fibrillis repletum, sicuti et illud (65.)

24. 25. Continuatio fibrarum tertii ordinis (Tab. IV. 74. 78.), quae in situ naturali in hac superficie non apparent, sed in margine collocatae existunt.

24. Procurrens funiculus longus (Tab. IV. 74. 74.).

25. Vltimae fibrae ad eum applicatae. (Tab. IV. 78.).

26. Interstitium simile prioribus.

27. 28. 29. Continuatio fibrarum ordinis quarti (Tab. IV. 88. 93. 96. 97. 98.) quae pariter in situ naturali in hac superficie non apparent, collocatae in margine.

27.

27. Funiculus procurrens breuis (Tab. IV. 88.).

28. Fibrae ad procurrentem ipſum applicatae (Tab. IV. 90. 91. 92. 93. 96.).

29. Fibrae, ad vltimam priorum fibrarum, quo focus pennatus et ramificatus efficitur, applicatae. (Tab. IV. 97. 98.).

30. Quae tanquam prima fibra ventriculi ſiniſtri in hoc corde conſiderari poteſt, proxima praecedente (y.) ad ſtriam relata.

31. Interſtitium fibrillis repletum.

32. Secunda fibra, in ſtriam inſerta, ad eam efficiendam concurrens.

33. 34. 35. Tres fibrae ſequentes, a filo ſucceſſiue ortae, confluentes (35.), in ſtriam inſertae.

36. Fibra, ex prioribus nata, in ſtriam inſerta.

37. Fibrae duae, paſſim inter ſe confluentes inordinata coalitione.

38. 39. Fibra ſequens, ſolito ductu a filo ad ſtriam procedens. Videtur ſub priores fibras (36.) tranſire, vti ſequentes. Neque continuat in ſtriam.

Vt prima pars fibrarum ergo ordinis primi (30. 34. 35. 36.) in ſtriam continuet, eamque efficiat; ſecunda (38. 40. 41.) ad ſtriam ſe applicet, vel ſe recipiat ſub eam; tertia (42. 43. 44. 45.) praeter finitam ſtriam in hoc corde tranſeat in dextrum ventriculum.

40. 41. Vltima ad ſtriam applicata fibra ordinis primi.

42. 43. 44. Fibrae huius ordinis praeter ſtriam tranſeuntes.

45.

45. Eaedem, vbi in fibras ventriculi dextri continuant.

46. Quae prima et vnica huius ordinis in funiculum terminalem inferiorem, in eius fummam extremitatem quidem, in hoc corde inferitur.

47. 48. Fibra prima ad priorem, quae in apicem funiculi terminalis inferitur, applicata.

49. 50. Secunda ad eandem applicata, et vltima fibrarum ordinis primi.

Dantur ergo in hoc ordine 1.) in ftriam continuatae, 2.) ad ftriam applicatae, 3.) praeter ftriam tranfeuntes in ventriculum dextrum, 4.) ad fe mutuo applicatae (48. 50.), quae vltimae ordinis primi funt. Ceterae ordinum fecundi et tertii in fafciculum terminalem inferiorem inferuntur.

51. 52. Prima fibra ordinis fecundi, ab aliis in principio tecta.

53. Proximae fibrae, ab aliis partim, partim ab interftitio inter fila cartilaginea finiftra, ortae.

54. Prima ex funibus tenuioribus fibra manifefta fublimior (Tab. IV. 46. *a*.).

55. Eiusdem continuatio et infertio in fasciculum terminalem inferiorem.

56. Secunda diftincta fibra (Tab. IV. Q.).

56. 57. Quatuor fibrae (Tab. IV. Q. 46. 47. 48.).

58. Confluxus harum fibrarum cum illa (56.).

59. Vltima funium tenuium fibra continuata ex illis (Tab. IV. 49. 50.).

60. Vbi et haec craffa fibra (59.) cum priori (58.) confluit,

fluit, eaque ratione fibrae funiculorum omnes in vnam denique (55.) continuatae, ceterae in angulum acutum inter illam et fibram (15.) concurrunt, et sic concentrantur.

60. 65. Interstitium seu angulus acutus, in quo concentratae fibrae concurrunt.

61. Simile fere interstitium acutum, fibrillis repletum, in quo fibrae (Tab. IV. 49.) concentratae concurrunt, vt (Tab. IV. 50.) in illam (59.) continuet, illa (Tab. IV. 49.) concentratione euanescat; sicuti ad sedem (65.) omnes demum funiculorum fibrae concentratae desinunt.

62. 63. 64. Parua interstitia oblonga fibrillis repleta.

65. Interstitium superius dictum acutum, cuius similia minora (17. 20. 23. 26.) occurrunt, quibus fibrae, in quas funes resoluti, et fibrae ordinis tertii, in fascias fere diuisae, principio latiores, augustiores fine, distinguuntur.

66. 67. Quatuor insignes fibrae, ex magno fune (Tab. IV. 54. 55. 56.) continuatae.

68. 69. Earum singularum insertio in fasciculum terminalem inferiorem.

70. 71. Quatuor fibrae ex fune ramificato productae (Tab. IV. 61. 62.).

72. Earum concentratarum insertio in fasciculum terminalem inferiorem.

73. 74. Quatuor fibrae insignes ex fune applicato productae (Tab. IV. 70. 71.)

74. Insertio priorum in praecedentem fibram.

75. Caeterarum fibrarum in funiculum insertio.

76. 24. Funiculus procurrens longus (Tab. IV. 74. 74.)

76. Eius insertio ad fasciculum terminalem inferiorem (Tab. IV. 105.).

77. 25. Vltimae fibrae ordinis tertii, earum quidem extremitates, in procurrentem funiculum longum insertae.
78. 27. Procurrens breuis (Tab. IV. 88. 88.).
78. Eius vncus, eiusque cum vnco fasciculi terminalis superioris (79.) coniunctio (Tab. IV. 101.).
79. Vncus funiculi terminalis superioris (Tab. IV. 100.).
80. Centrum commune focorum (Tab. IV. 102.).
(53. 68. 69. 72. 75. 76. 4. 5. 6. 7. 79. Focus inferior pennatus.)
82. Primae fibrae angulares, sub striae fibris (*i. n.*) ortae.
83. Earum continuatio.
84. Fibrae angulares quasi mediae, ex media parte fili cartilaginei posterioris dextri ortae.
85. Quae ex fine fili oriuntur.
87. Ex interstitio ortae inter fila cartilaginea dextra.
88. Earundem in superiorem superficiem flexio.
89. Prima ventralium fibrarum portio, sub fibris (*i*) orta.
90. Altera portio ventralium.
91. 91. Alia portio, partim ex fibra striae (*g*) partim a latere striae (91.) orta.
92. 92. Alia portio a latere striae.
93. 93. Alia portio ex stria continuata.
94. 95. Aliae portiones ex stria continuatae.
96. Alia portio partim a stria, partim ex fibris ventriculi sinistri continuata (44. 45.).
97. Alia fibrarum portio ab apice fasciculi terminalis inferioris orta.
98. Fasciculus in hoc corde terminalis ventriculi dextri.
99. Fibrae ventrales vltimae ex terminali fasciculo ortae.
100. Apex ventriculi dextri separatus ab apice sinistri.

DE

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio VII.

DE STRATIS FIBRARVM IN VNIVERSVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 25 *Ianuar.* 1787.

Strata fibrarum secundum Lowerum.

Fibras ventriculorum cordis in varia, dum illos inuoluunt, strata esse distinctas, separabilia a se inuicem, et directione fibrarum diuersa, a primis iam, qui in structuram earum inquisiuerunt, Auctoribus cognitum fuit. Tria diuersa fibrarum strata *Lowerus* ventriculo vtrique attribuit: *externum*, quod solis quidem animalibus proprium est, in corde humano non datur, fibris constructum rectis, ab apice recta ad basin ductis *a*); deinde, quod *medium* vocat, quodque ipsum in humano corpore verum vtriusque ventriculi externum est, fibris ab apice oblique dextrorsum ad basin transeuntibus *b*); denique quod, *inte-*

a) *Lower* de Corde. Edit. Lond. pag. 24. Tab. II. fig. 2. Edit. Lugd. Tab. III. fig. 2

b) Low. l c. Edit. Lond. pag. 25. Tab. II. fig. 3. Edit. Lugd. pag. 30. Tab. III. fig. 3.

interius *Lowero* dictum, verum fecundum, feu medium, in dextro ventriculo, in finiftro tertium eft, fibris factum, a dextro cordis latere ad finiftrum oblique adfcendentibus, et ventriculum vtrumque complexis *a*); vt, fi internum his addas, quod carneae columnae intus, maximam partem parieti interno adhaerentes, efficiunt, quatuor omnino fecundum anatomen *Loweri* numeranda fint ftrata fibrarum, ventriculo vtrique communia.

Secundum Senacum.

Rectius omnino *Senacus* tria in dextro ventriculo, externum, medium, internumque, fi fcilicet columnae pro interno habentur, in finiftro longe plura diftinxit, quorum numerum non inuenio effe indicatum. Eaque directione ferri horum ftratorum fibras in ventriculo dextro, accuratior fcrutator docuit, vt, quemadmodum externae oblique a bafi finiftrorfum ad apicem defcenderent, mediae ab apice finiftrorfum ad bafin adfcendant potius, decuffando externas *b*); internae variis modis progrediendo reticularem et indeterminatam ftructuram efficerent *c*). Siniftri ventriculi fibras in variis fuis ftratis ita fucceffiue ex oblique defcendentibus, qua directione fcilicet externae feruntur *d*), ad transuerfalem appropinquare ductum, vt in tertio vel quarto ftrato omnino iam transuerfim fibrae procedant *e*); deinde et transfcendere in ftratis fequentibus ductum

a) Low. Edit. Lond. pag. 25. 26. Tab. II. fig. 4. Lugd. pag. 31. Tab. III. fig. 4.

b) Senac. Traité du coeur. Tom. I. pag. 200. Tab. VII. Stratum externum fig. 1. et 2. medium fig. 3. et 4.

c) Senac. l. c. pag. 198. Tab. 14.

d) Senac. Tab. VII. fig. 1. h. h. Tab. VIII. fig. 2.

e) Senac. Tab. VIII. fig. 3.

ductum transuersum, vt magis magisque ab apice ad basin successiue adscendant *a*).

In quibus sola directio fibrarum in vniuersum notata.

Verum haec omnia quoque fere sunt, quae de fibris ventriculorum mediis, tum et de caeteris, externis internisque, tradita exstant; neque vlterius in earum naturam ars anatomicorum penetrare potuit. Inanes omnino proprietatibus quibusvis fibrarum icones *Senaci* pariter ac *Loweri* apparent, quibus mediae non minus, quam quibus externae repraesentantur; siquidem praeter lineas in iis simplices, parallelas, sibi mutuo simillimas, quod nempe et ipsum iam falsum est, nihil aliud vides. Ortus fibrarum peculiaris nullus, insertio determinata nulla, nec vspiam singularis ductus, aut progressus, aut quicquid fibram, vel portionem fibrarum, quamcunque a quacunque alia, aut fibra, aut portione fibrarum, discerneret, expressum est in iis iconibus; cum tamen in tot diuersas portiones diuisae hae fibrae fascias diuersas, aut fasciculos, quasi musculos singulares, figura, ortu, progressu, insertione, natura et vsu, diuersos, efficiant. Nimirum, si verum dicendum est, fibras in sedibus iis, quas icones repraesentant, in superficiebus iis ventriculorum, dari, id cognitum quidem erat, et extra omnem dubitationis aleam positum, et qua directione in vniuersum hae fibrae ferrentur. De caetero nil prorsus obseruatum. Non poterat ergo, nisi manifesto fingeret, aut varios propriosque ductus pictor fibris attribuere variis, aut determinatas insertiones et ortus, aliasue proprietates quascunque, nec quidquam, verbo, aliud facere, quam simplices ducere lineas parallelas, quibus has sedes et superficies ventriculorum repleret. Neque mirum hoc valde est, cum admodum difficile omnino sit ob-

 ser-

a) Senac. Tab. VIII. fig. 4. 5. pag. 194. 195. 196.

ſeruare et diſtinguere has fibras, quemadmodum in prima diſſertatione fuſius expoſui.

Et quae nec vnquam tota ab his Auctoribus viſa eſſe videntur.

Haud plura etiam in deſcriptionibus *Senaci*, quam in iconibus eius, de natura harum fibrarum continentur. Id ſolum et verum eſt, et ad rem pertinet, quod de *directione* fibrarum in vniuerſum verboſior Auctor profert; reliqua, vbique eadem, repetita, parum ad rem faciunt. Eademque propemodum pauciſſimis ſuis, quae et retuli fere, verbis breuiſſimus indicat *Lowerus*. Imo ſi amplius etiam meam de his Auctoribus ſententiam ſcire volueris, non poſſum me cohibere, quin credam, neque *Senacum*, neque *Lowerum*, nec quemquam caeterorum Auctorum, qui de fibris cordis ſcripſerunt, vnquam varia illa, de quibus diſſerunt, ſtrata vidiſſe tota, quovsque ventriculos ambiunt, quamuis non deſcribant modo haec ſtrata tota, ſed iconibus quoque, falſis ſcilicet, repraeſentent. Solum ex mediis ſiniſtri ventriculi ſecundum ſtratum integrum eſt, totumque a baſi ad apicem, a crena ad ſtriam, ventriculum inuoluit; neque id quidem, ſi ſcrupuloſior fueris, pro integro plane haberi poteſt. Tertium, quartum, et quintum, verſus apicem et ſtriam verſus, deficiunt. Minus quidem tertium, at maxime quartum, quo vix tertia pars ſuperficiei ventriculi prope baſin tegitur, reliqua maxima caret. Vnicum, quod datur, dextri ventriculi medium ſtratum quartam fere ad apicem partem ſuperficiei ventriculi vacuam fibris relinquit. Haec ſingula ſtrata integra et completa, a baſi ad apicem, a crena ad ſtriam, vsque fibris ſuis tegentia ventriculos, et deſcribunt pinguntque *Senacus* pariter et *Lowerus*. Neque difficultas obſeruandi in culpam hic adduci poteſt, qua falſi fibras ſe videre crediſſent ſtratorum in ſedibus iis, vbi nihil prorſus exiſtit praeter

ter columnas ventriculorum et internam reticularem ſtructuram, quas coecus etiam indagator a ſtratis fibrarum facile diſcerneret. Adeo etiam in medio ſtrato ventriculi dextri, in ſuperficie quidem eius inferiori *a*), ſingularis fibrarum, deficientium paſſim, et adeo manifeſta diſtinctaque ſtructura eſt, vt, vel nunquam viſam eam eſſe, vel ita viſam, vt vere eſt, neceſſe ſit. Hanc pariter *Senacus* ſimilem prorſus caeteris ſtratorum fibris et pinxit et deſcripſit, fibris nimirum conſtantem parallelis aequalibus ſimilibusque tum inter ſe, tum etiam cum caeteris omnibus quorumuis ſtratorum fibris *b*). Veriſimile ergo omnino eſſe videtur, nonniſi paruas anguſtasque particulas tantum *Senacum* et *Lowerum*, dum diuerſorum ſtratorum fabricam et naturam indagare conati ſunt, detexiſſe de variis ſtratis illis, in quibus cum viderint, qua directione in vniuerſum fibrae progrederentur, coniecturam fecerunt, etiam in caeteris eorum ſtratorum ſedibus omnibus, perque vniuerſam ventriculi ſuperficiem, ſimilem omnino et directionem fore fibrarum et reliquam omnem eius ſtructuram. Hanc tum ſic creditam fabricam, quae nihil caeterum ſingulare ſcilicet haberet, quaſi anatomia compertam, et tanquam ſi oculis eam vidiſſent, et deſcriptionibus ſuis inſeruêre et pinxêre in iconibus. Neque id etiam mirum mihi eſſe videtur; cum nec facile certe ſit, ſingula haec ſtrata illaeſa per vniuerſum cordis ambitnm detrahere altera ab alteris, nec parum etiam laboris operi huic atque patientiae ſit adhibendum; cumque omnino veriſimile etiam videri poſſit, quemadmodum in vna alicuius ſtrati ſede, ſic et in caeteris ſe fibras habere omnibus, atque in vniuerſo ſtrato.

Strata

a) Tab. IX. ſequentibus adiungenda Diſſertationibus, quam confer cum Senaci Tab. VII. fig. 4.

b) Senac Tab. VII. fig. 4.

Strata ventriculi dextri difficiliora euolutu, at certius et adcuratius natura distincta.

Certis ergo omnino determinatisque stratis fibrae, dum circa ventriculos voluuntur, distinctae sunt. Difficilius paulisper in dextro ventriculo externum a subiecto medio detrahitur. Tenuissimae fibrae externae a pariter tenuibus mediis dum separantur, et tensae rumpuntur facile, et vix etiam distingui secernique possunt, quin mediae simul vna cum externis auferantur. Longe facilius in sinistro ventriculo quaelibet exteriores fibrae a suis sibi contiguis interioribus discerni pariter et separari possunt. Crassiores enim fasciculi fibraeque, quibus strata huius ventriculi construuntur, neque abrumpi se facile sinunt, neque vlla difficultas est, quin alius ab alio fasciculus, aliaque crassior fibrarum fascia ab alia, separetur atque detrahatur. Verum si opera adhibita in aliqua sede tantum eleuatas primum fibras externas ventriculi dextri recte a mediis distinxeris; facili negotio (cultro modo ne medias forte, vel ipsas externas quoque, laedas, caueto,) totum stratum paulatim externum a medio detrahitur. Atque tum quidem certus quoque esse possis, nullam fibram cum strato externo esse ablatam, quae ad medium pertineret, nullam in medio relictam, quae strati esset fibra externi; ita scilicet et tenuia sunt haec strata ventriculi dextri, simplicibusque solitariis, quamuis intricatis inter se, fibris componuntur, et facilis est atque continua solutio eorum, dummodo caute haec fiat, sensimque et sensim instituatur. Si vel exigua enim portio fibrarum ex strato externo in medio relinqueretur, defectum continuo in externo habebis manifestum ob tenuitatem stratorum; columnae contra illico apparebunt, et interna ventriculi structura, vbi minimam de medio abstuleris strato portiunculam. Et facilis solutio pariter stratorum cauet, ne mediae pro externis, externaeue pro mediis aut habeantur aut possint haberi; siquidem eiusdem strati ti fibrae multo et magis inter ſe ipſas ſunt intricatae, quam fibrae diuerſorum ſtratorum, et firmius inter ſe mutuo cohaerent. Sic naturalia ergo, quamquam difficiliora inquiſitu, ſunt ſtrata ventriculi dextri, fibraeque a natura ipſa in ſtrata diſtinctae; vt nec arte hic ordo fibrarum turbari poſſit, nec quidquam arbitrio in diſtinguendis huius ventriculi ſtratis ſit relictum.

Siniſtri ſolutu facilia difficilius recte diſtinguuntur.

Aliter cum ſtratis comparatum eſt ventriculi ſiniſtri. In eo craſſioribus fibrarum faſciculis, vel pluribus etiam ſibi mutuo ſuperſtratarum fibrarum ſeriebus, ſingula ſtrata compoſita, facile, aut aliquam ſui portionem cedunt ſubiecto ſtrato interiori, dum ab eo ſoluuntur, quam ipſi huic interiori ſtrato propriam eſſe putes, aut ſecum abducunt aliquam ex eo portionem fibrarum, quam credas ad exterius pertinere ſtratum, ab interiori ſolutum. Idque eo facilius fieri poteſt, cum haud difficilius, quae ſibi mutuo ſuperſtratae fibrae vnum ſtratum efficiunt, quam ſtrata varia ipſa a ſe inuicem ſoluantur. Accedit etiam, vt aliis in ſedibus craſſiora ſtrata, in aliis tenuiora, exiſtant, quo facilitas errandi valdopere augetur. Fieri ergo poteſt, vt minorem nunc numerum ſtratorum in ſiniſtro ventriculo inuenias, nunc multo maiorem; prout ſtrata ſcilicet aut craſſiora effeceris, aut nimia adhibita arte tenuiora. Sola ergo, quominus hoc fiat, diuerſa directio fibrarum impedire poteſt, quae, vbi detegitur, vnicum fere indicium eſt noui ſequentis ſtrati, cuius fibras intactas relinquere oportet. Atque haec quidem vix ſufficit tamen vbique ad omnes praecauendos errores, quibus in diſtinguendis determinandisque ſtratis indagator obnoxius eſt. Ita ſenſim enim ſenſimque in ſedibus nonnullis fibrae directionem ſuam mutare videntur, vt, niſi aliunde productae fibrae ſui continuatione tunc diuerſorum ſtratorum ductum indicarent, etiam ne hoc quidem directionis fibrarum auxilio diuersa strata earum in sedibus illis distinguere posses. Quamquam ergo multo omnino facilius in sinistro, quam in dextro, ventriculo, imo nullo etiam negotio, fibrae a fibris distinguantur subiectis, et separentur, detrahanturque; difficile tamen eo magis non modo distinguere est in eo ventriculo naturalia strata ab iis, que arte anatomicus efficere potest, et praecauere omnes in iis distinguendis errores, sed omnino concedendum est quoque, minus sua natura determinata definitaque strata in sinistro, quam in dextro, ventriculo esse. Paucioribus scilicet, iisque minus certis, indiciis se ita in sinistro ventriculo strata fibrarum distinguunt, vt, quamuis accurate in iis discernendis processeris, aliquid tamen arbitrio relictum esse videatur.

Tria certissima strata ventriculi dextri.

Tria ergo omnino, natura distincta, strata fibrarum in dextro ventriculo dantur. Quorum primum, *a*) in tertia dissertatione descriptum, *externum*, fibris constat, a basi et stria ventriculi sinistrorsum versus crenam et apicem in superiori superficie *b*), dextrorsum oblique versus marginem et apicem in inferiori *c*), ea ratione descendentibus, vt transuersali ductui vbique progressus obliquus ille, et multo quam longitudinali, sit propior. Secundum, seu medium, stratum a stria et apice, decussando fibras externas, versus crenam et basin sinistrorsum oblique in superiori *d*), oblique dextrorsum, versus marginem et basin, in inferiori superficie, *e*) ea ratione quidem fibris suis adscendit,

a) Tab I. III. IV. VI.
b) Tab. I. IV.
c) Tab. III. VI.
d) Tab. VII.
e) Tab. IX.

dit, vt multo magis pariter ad transuerſam quam ad longitudinalem directionem obliquus ille progreſſus inclinet. Tum porro vero, quae parum vbique in medio hoc ſtrato adſcendunt, fibrae, quo propius ad crenam in ſuperiori ſuperficie accedunt, eo et continuo ad transuerſum magis declinant ductum, vt proximae crenae, niſi omnino deſcendunt, transuerſim tamen progrediantur. Sic parum in his prope crenam ſedibus directione differunt a fibris ſtrati externi, et angulis eas, nonniſi acutiſſimis, decuſſant. Praeterea id notabile quoque eſſe videtur de mediis fibris, quod, quo propius ad crenam ſuo decurſu accedunt, eo et firmius ſimul adhaereant fibris externis, vt proximae crenae vix etiam ſeparari ab illis poſſint. Eademque in ſeparandis his fibris difficultas verſus apicem ſenſim ſenſimque increſcere mihi viſa eſt. Tertium ſtratum internum, quod in apertis ventriculis continuo, etiam ſine praeparatione, apparet, medias externasque fibras ſuo fibrarum progreſſu decuſſat, magis multo, quam medium, verſus baſin a ſtria et apice adſcendendo, dextrorſum oblique in inferiori, ſiniſtrorſum in ſuperiori, ſuperficie. Frequenter, vt notum eſt, collectae in faſciculos hae fibrae a parietibus ventriculi diſſiliunt, iterumque ſe iisdem adiungunt, vt transuerſim etiam ſaepius per mediam cauitatem proſilire nonnulli eorum faſciculorum oppoſitosque connectere parietes inueniantur. His varie ramificatis ſimul, interque ſe ipſos anaſtomoſibus coniunctis, columnae dictae, et interna reticularis ſtructura, ventriculi efficiuntur.

Sex ſtrata ſiniſtri.

Mea quidem ſententia ſex ſtrata fibrarum, natura diſtincta, in ventriculo ſiniſtro, ſi nempe et columnas cenſueris, internamque reticularem ſtructuram, ſi non, quinque, exiſtunt, quorum in brutis, quatuor *Lowerus*, in homine tria tantum,

 errore

errore manifesto, numerauit, quibusque numerandis *Senacus* cum caeteris de corde scriptoribus potius abstinuit. Primum externum est, quod in quarta dissertatione descripsi. *a*) Huius fibrae adeo a basi sinistrorsum oblique in superiori superficie *b*), dextrorsum in inferiori *c*), versus apicem descendunt, vt longitudinali ductui, multo quam transuersali, propiores, imo proximae, sint, et in plurimis sedibus etiam pro vere longitudinalibus haberi queant. Latos praeterea crassosque, at planos, funes funiculosque hae fibrae externae et longos, passimque ramificatos, collectae efficiunt: vt vel solis his notis ab omnibus interioribus externum hoc stratum facili negotio distinguatur. Oblique pariter, sinistrorsum in superiori, *d*) dextrorsum in inferiori, superficie *e*) stratum secundum a basi et crena versus apicem et striam fibris suis, at ea ratione, descendit, vt multo transuersali ductui fibrae, quam longitudinali, sint propiores, vtque nonnullis in sedibus omnino pro transversis possint haberi. Nullum vestigium ramificationis funium in hoc strato inuenitur. Funiculi tamen longi, solitis fibris crassiores, circa basin maxime, posterioremque regionem, occurrunt; vt, quamuis longe diuersum, aliquam tamen affinitatem hoc stratum secundum cum externo habeat. Tertium *f*) maxima sui parte a crena et apice versus basin et striam sinistrorsum

a) Tab. I. B. C. D.

b) Tab. citat.

c) Tab. III. A. B. C.

d) Tab. VII.

e) Tab. IX.

f) Quamuis singula strata cordis eiusdem, cuius nunc maxime descriptionem trado, picta dudum et Academiae repraesentata, habeam; cum ordinem tamen iconum ob aliarum forte inter illas insertionem constituere nondum possim; citationes, eo magis etiam, omitto, quod, quota singula strata sint, iconibus communicatis, facile intelligetur.

ſtrorſum oblique in ſuperiori, dextrorſum in inferiori, ſuperficie fibris ſuis, et ea ratione, adſcendit, vt medium quaſi locum fibrae inter longitudinales et transuerſales teneant, angulosque efficiant cum vtroque dictorum ductuum aequales, ſcilicet ſemirectos. Longis praeterea ſeparatisque a ſe mutuo fasciis hoc ſtratum in ſuperiori ſuperficie inſigne eſt, tenuioribus funiculis in inferiori diſtinguitur. Quod proprie igitur transverſum ſtratum vocares, in ſiniſtro ventriculo non datur; cum ſecundum ſuis fibris deſcendat, tertium iam adſcendat. Nonnullis in ſedibus quidem ita propinquas ductui transuerſo fibras ſecundum, imo et ipſum hoc tertium quoque, habet, vt paene pro transuerſis fibrae in iis ſedibus haberi poſſint; at plurima tamen parte fibrarum manifeſto ſecundum ſtratum deſcendit, tertium adeo adſcendit, vt a longitudinalibus non magis fibrae, quam a transuerſis, differant. Mire ergo vir optimus, meritiſſimus de cordis anatomia *Senacus*, hac ſua in paruis ſpatiolis fibras indagandi methodo errauit, qui, velut praecipuum atque ſingulare, transuerſum hoc, quod nusquam exiſtit, ſtratum poſuit; vtpote medium ſcilicet inter reliqua quod eſſet, eaque diſtingueret. Idemque ex caeteris maxime pingendum etiam elegit. Quartum ſtratum adeo a crena ad baſin fibris ſuis adſcendit, ſiniſtrorſum oblique in ſuperiori, dextrorſum in inferiori, ſuperficie, vt etiam in iis ſedibus, vbi minus cito in variis ſtratis fibrae ſuam directionem mutare ſolent, multo tamen longitudinali, quam transuerſali, ductui ſint propiores. Quintum recta ab apice ad baſin adſcendit, imo vergit iam potius adſcendendo dextrorſum paulisper, in ſuperficie vtraque. Hoc fibris ſingularibus ſerpentinis, tenuioribus, debilioribusque conſtat, et reticulatum iam in plurimis locis parietem efficit. Denique ſextum, a columnis productum carneis, ipſisque papillis, niſi vel prorſus a ſtratis ventriculi remouere hoc, vel etiam ad quintum referre, velis, oblique dextrorſum ſuo ductu ab apice verſus baſin adſcendit.

Directio ergo ſtratorum ſingulorum diuerſa in quasuis fere, maxime ſiniſtri ventriculi, fibras regiones ducit.

Sic, vti primi, ſiue externi, ſtrati fibrae a baſi ſiniſtrorſum oblique ad apicem deſcendunt; dextrorſum contra oblique ab apice ad baſin cum fibrae adſcendant ſtratorum vltimorum, quinti ſextique; oppoſitae recta primi ſtrati fibris hae fibrae ſtratorum vltimorum, eadem cum illis ſemitam legunt, redeuntque per eam in regionem eandem vltimae fibrae, vnde primae exierant. Quumque mediorum ſtratorum fibrae nonniſi ſenſim ſenſimque ex ea, qua ſtrati externi fibrae feruntur, directione in directionem tranſeant ſtratorum vltimorum; ſingulorum ſe mutuo decuſſantibus fibris; nulla regio eſt, aut nulla directio, in quam non ductas inuenias fibras in ventriculo ſiniſtro. Eadem ratio diſpoſitionis fibrarum in dextro quoque obtinet ventriculo, modo vt, pauciora in eo, tria nimirum, diuerſa ſtrata fibrarum cum tantum exiſtant, plures inter eas, in quas ductae fibrae inueniuntur, directiones, quam in ſiniſto ventriculo, vacuae fibris relinquantur.

De numero ſtratorum monitum.

Haec ea ergo ſtrata ſunt diuerſa fibrarum, ex quibus ventriculi cordis conſtruuntur, in quibus diſtinguendis et determinandis, enumerandisque, vix me erraſſe crediderim, niſi quis forte ex primo ſtrato, quod circa baſin maxime valde craſſum eſt duo efficere voluerit ſtrata, quod vt facile fieri poſſet, ita contra ordinem naturae id factum mihi videretur.

Monitum de directione ſtratorum.

Vti vero, minime ſingulas in variis his ſtratis fibras ſimiles mutuo ſibi ductu et progreſſu, aut parallelas inter ſe, eſſe,

esse, in superioribus iam monitum est; ita nec eam singulae quoque diuersorum stratorum fibrae directionem accurate obseruant, quas in definiendis iis stratis diuersis indicaui. Maxima pars tantum earum eam exacte sequitur directionem indicatam. Alia magis, alia minus paulisper, vel versus transuersum inclinat ductum, properatque, vel versus adscendentem, quorsum per varia strata successiue fibrae tendunt; vt media scilicet omnium, et ipsa adcurate plurimarum, in singulis stratis fibrarum directio ea sit, quam in definitionibus stratorum tradidi.

Qua ratione in vniuersum fibrae a definita directione in singulis stratis aberrent.

In vniuersum, sicuti per singula strata ex oblique descendente ductu in transuersum primo vel proximum ei, deinde ex hoc in oblique adscendentem fibrae successiue transeunt; magis in eo transitu properare videntur in stratis singulis fibrae, quae apici propiores sunt, minus, quae medium ambiunt ventriculum, minime, quae circa basin versantur. Idque et necesse est, vt fiat, quemadmodum ex sequentibus patebit, et, omnino fieri, etiam in ipso iam externo strato apparet; vbi, quae ex filis oriuntur cartilagineis circa basin ventriculi, longitudinem fere cordis, ad marginem imprimis, sequuntur, *a*) oblique magis procedunt, quae, ortae a media crena, medium ventriculum occupant, *b*) et transuersim denique omnino progrediuntur, quae, proximae apici, ex fine crenae originem ducunt; *c*) inter quas qui ipsi vltimi sunt, ipsumque tenent api-

a) Tab. IV. Q. R. Tab. VI. 13. 14. 53. Tab. I. C. w. B. Tab. III. 17. 27. 30.
b) Tab. IV. 75. 85. 78. Tab. I. 88. 89. 90. 95.
c) Tab. I, 99. 100. 101. 102. 103. Tab. IV. 92. 93. 94. 95. 97. 98.

apicem, fasciculi terminales *a*) paulisper etiam oblique sinistrorsum iam adscendunt. In solis, quae prope basin ventriculum in strato secundo cingunt, funiculis crassioribus aliqua leuis exceptio locum habere videtur, quae tamen et ipsa, quin peculiarem suam causam habeat, qua explicetur, quaque non obstante regula tamen illa vniuersalis constet, nullus dubito. Isti nempe funiculi in eo strato secundo, atque in sola quidem superiori ventriculi superficie, transuerso ductui proximi iam sunt, cum mediae eiusdem strati fibrae, a media crena ortae, oblique adhucdum descendant. In superficie ventriculi inferiori recte omnino funiculi illi oblique descendunt, mediae fibrae, a crena ortae, fere transuersim in striam transeunt, apici propiores oblique adscendunt. Eadem ratio dispositionis fibrarum, sicuti in strato externo, atque in caeteris omnibus secundi strati regionibus, in singulis reliquis stratis quoque obseruatur.

Qua ratione in vniuersum defectu strata laborent.

Tantum abest autem, quin integra atque perfecta sint singula haec strata, totosque complectantur ventriculos, aut quin magnitudine inter se sint aequalia, vt tertia potius non modo, quartaue, sed dimidia quoque, imo duabus tertiis partibus sui, et amplius, interiora maxime sinistri ventriculi strata, deficiant. In vniuersum haec regula esse videtur stabilita: vt sola externa strata super totos se extendant ventriculos, media quaeuis aliqua sui parte deficiant; atque id ea quidem ratione, vt, internis reticularibus ventriculorum structuris, siue stratis internis, exceptis, quae media inter haec et externa sunt, quo sunt singula interiora, eo maioris sui partis defectu laborent. Deinde vt versus apicem ventriculorum primum strata

a) Tab. IV. 99. 103. 104. Tab. I. 104.

ta deficere incipiant; hinc verſus baſin ſucceſſiue in ſequentibus ſtratis defectus progrediatur; vt quo ſunt ſtrata minora, quoue interiora, eo etiam magis ad ſolam ventriculi baſin ſe recipiant. Denique vt, ſicut ab apice ad baſin, a ſtria ſimul ad crenam in ventriculo ſiniſtro, in dextro a crena ad ſtriam, nimirum ab inſertionis fibrarum ſede ad ſedem ortus, defectus ille in variis ſibi mutuo ſuccedentibus ſtratis magis magisque adſcendat. Quo ſtrata ergo, prout minora ſucceſſiue, interioraque, exiſtunt, ad baſin exacte aortae in ſiniſtro ventriculo, ſiue orificium eius arterioſum, in dextro ad angulum inter ſtriam et baſin, ſe magis magisque retrahunt; quae quippe ſedes indicatae medium inter baſin et crenam in ſiniſtro ventriculo, inter baſin et ſtriam in dextro, locum occupant.

Defectus ſtrati medii ventriculi dextri.

Stratum ſecundum, ſeu medium, ventriculi dextri in inferiori ſuperficie quidem a baſi ad apicem vsque ſe extendit, vt variis in ſedibus tamen, apici propioribus, hiatus minores ſingulari certaque ſtructura effecti, paſſim relinquantur. Vbi ad marginem vero accedunt hae fibrae ſtrati ſecundi, in parte iam ventrali deficere incipiunt, magnis hiatibus formatis, in quibus interna reticularis ventriculi ſtructura apparet; in tota apicis regione ad ipſum marginem omnino deſinunt, quod qua fiat in ſingulis ſtratis ratione, in deſcriptionibus ſtratorum explicabitur. Vt inferior ergo ventriculi paries totus, et duae tertiae quaſi partes ſuperioris, ſecundo ſeu medio hoc ſtrato tegantur, reliqua tertia ſuperioris parietis pars circa apicem vacua reſtet.

Secundi ſtrati ventriculi ſiniſtri defectus.

Secundum ſtratum ſiniſtri ventriculi in omnibus mediis completiſſimum eſt. Aliqua tamen pars et huic, ad ipſum apicem quidem, deficit. Remotis enim ſtrati externi procurren-

 tibus

tibus funiculis, extremitatibusque eorum vnciformibus, ad terminalem vsque inferiorem fasciculum, ad quem illae se applicant *a*); itemque finibus remotis fibrarum omnium ordinis secundi *b*), quibus ad inferiorem pariter is ordo se applicat fasciculum terminalem, focum efficiendo inferiorem; hiatus continuo apparet, angustior quidem, at longus, secundum totum tractum terminalis fasciculi inferioris, ad quem finibus suis curvatis fibrae applicatae erant *c*), a centro communi focorum *d*), vbi fasciculus inseritur, ad eius ortum vsque *e*) se extendens. Is vsque in cauitatem ventriculi apertus penetrat, vt interna ventriculi structura reticularis et columnae carneae appareant. Sic neque secundum stratum neque vllum interiorum ad hanc vsque sedem pertingit. Et solis igitur extremitatibus fasciculorum procurrentium vnciformibus et curuatis finibus fibrarum ordinis secundi, quibus focus inferior formatur, hiatus iste tegitur.

Defectus strati tertii ventriculi sinistri.

Tertium ventriculi sinistri stratum totam posteriorem circa basin regionem, deinde et mediam, siue ventralem, ventriculi in superficie vtraque fibris suis occupat. Tota apicis regio strato tertio caret. Nimirum a fine crenae vltimae huius strati fibrae terminatrices oblique sinistrorsum ad imam ventralem regionem vsque in superiori superficie adscendunt, flexaeque circa marginem transuersim fere in inferiori ad striam progrediuntur. Vt ipsa apicis regio tota, quarta circiter aut quinta

a) Tab. IV. 101. 105.

b) Tab. IV. 106. Tab. VI. 53. 68. 69. 72. 75.

c) Tab. VI. 4. 5.

d) Tab. IV. 102. Tab. VI. 80.

e) Tab. VI. 4.

ta pars ventriculi, his terminatricibus fibris a ſtrato tertio excludatur.

Quarti eiusdem ſtrati defectus.

Quartum eiusdem ventriculi ſtratum poſteriorem ſolam ad baſin regionem ventriculi in ſuperiori ſuperficie occupat, anguſtiſſima tantum ſtrati huius portio iuxta crenam per ventralem ſeu mediam regionem, ad initium vsque regionis apicis decurrit. In ſuperficie inferiori maior ſolummodo portio regionis ad baſin hoc ſtrato tegitur; notabilis portio in hac quoque regione caret. Nimirum a fine partis mediae crenae ita oblique vltimae terminatrices huius ſtrati fibrae verſus baſin adſcendunt, vt per totam mediam ventriculi regionem longitudinem fere ſuo ductu ſequantur. In poſteriori ad baſin regione curuatae demum marginem verſus et baſin oblique progrediuntur. Hoc flexae eodem circa marginem ductu obliquo per inferiorem ſuperficiem quoque ad principium ſtriae vsque decurrunt; quo dimidia quaſi diagonalis pars regionis poſterioris ad baſin in inferiori ſuperficie hoc ſtrato occupatur. Sic tota ergo apicis regio in ſuperficie ſuperiori, et tota fere ventralis, paruâ tantum ad crenam portione exceptâ, duae omnino tertiae partes ventriculi, ſtrato quarto carent. In inferiori et tota apicis regio, et ventralis regio tota, et dimidia pars porro poſterioris ad baſin regionis, ſummatim tres quartae, niſi amplius, totius ventriculi partes, defectu huius ſtrati laborant.

Qua quintum et ſextum ſtrata ſe habeant ratione.

Quintum denique ſiniſtri ventriculi ſtratum, niſi ad internum hoc potius referre volueris, tenue eſt et per interualla ſingulari modo, velut reticulatim productum, deficit, vnaque cum interno, ſeu ſexto, columnis effecto carneis, papillisque et reliqua ſeparata retiformi ſtructura per totum fere ventriculum ſe ſuper internos parietes extendit.

Vnde, cur circa basin crassiores parietes ventriculorum, tenuiores versus apicem, sint, intelligitur.

Neminem anatomicorum latet, diuersa in diuersis regionibus parietes ventriculorum crassitie donatos esse. Quotiescunque enim hi aperiuntur, quod longitudinali scilicet sectione, ab apice ad basin ducta, fieri solet, crassiores continuo prope basin, tenuiores versus apicem, se secti parietes obtrudunt. Minus quidem insigniter in dextro ventriculo, qui totus tenuior est, at eo magis in crassiori sinistro se res manifestat. Crassior dexter tamen multo per totam basilarem, perque angularem et ventralem regionem, tenuior longe in tota apicis regione est. Nimirum crassior certe tribus compositus stratis fibrarum ventriculus est, quocunque medium vsque se stratum extendit; tenuior omnino duobus tantum factus, vbicunque illud deficit. Sinister ventriculus maximam in posteriori circa basin regione crassitiem habet. Inde non, vti in dextro, ad certum terminum vsque apicem versus eadem crassities descendit, eadem a termino illo ad apicem vsque imminuta crassitie manente; sed sensim sensimque decrescit; vt omnium tenuissimus ipse apex sit, posterior apicis regio illum manifesto crassitie superet; media ventralis pars multo hac apicis regione crassior, et omnium crassissima postrema sit regio circa basin. Non vnum scilicet stratum est medium, in hoc sinistro ventriculo, velut in dextro, quod vna tantum in parte ventriculi, aequaliter vbique, quovsque id se extenderet, parietem eius crassitie augeret; sed plura dantur eiusmodi media strata, quorum alia aliis magis continuo longiusque a basi, vnde singula incipiunt, versus apicem se extendunt, eaque ratione, vt sensim sensimque a basi versus apicem crassior ventriculi paries crassitie imminuatur, efficiunt. Quod solum ergo, quod quotidiana scilicet obseruatio inculcat, diuersa nimirum in sedibus diuersis crassitie parietes donatos esse ventriculorum, si optimi et acuti caeterum

Viri

Viri conſiderauiſſent; nunquam profecto, integra ſingula completaque ventriculorum ſtrata eſſe, in animum ſibi potuiſſent inducere, vt credant; etiamſi nonniſi exiguas tantum portiunculas horum ſtratorum vidiſſent.

Differentia inter fibras medias et externas.

Fibrae caeterum ipſae, quibus media ſtrata contexta ſunt, alia paulisper ac externorum ſtratorum fibrae natura eſſe viſae ſunt mihi. Videbantur enim molliores magisque ſolubiles a ſe mutuo, certe minus intricatae inter ſe externis, minusque fibrillis vbique, velut illae, connexae. Sunt magis fibrae a fibris, fasciculique a fasciculis, diſtincti, et longe in vniuerſum, cum fibrae, tum fasciculi, faciliores obſeruatu, et euolutu ſeparatuque faciliores.

Cur magis externae quam mediae intricatae ſint inter ſe.

Videntur hoc fine ventriculi ſtratis circumdati eſſe externis, vt maius robur non modo iis et vis maior in contractione addatur, ſed ſimul vt firmiter quoque mediorum ſtratorum omnium tum ſingulae fibrae, tum fasciae fibrarum diuerſae contineantur; quo minus in validiſſima cordis actione vacillare et ex ſitu ſuo naturali cedere queant. Ita et tenuibus ſaepe et ſparſis ſeparatisque fasciis interiora imprimis ſtrata ventriculi ſiniſtri, et medium dextri quoque, in ſedibus nonnullis conflata ſunt; cum externum contra ſtratum ventriculi dextri denſioribus longe et firmioribus fasciis, ſiniſtri craſſiſſimis firmiſſimisque funibus, prope baſin maxime, vbi maior mediorum ſtratorum numerus eſt, conſtructa non modo ſint, ſed fascias eas funesque et fasciculos, immo ſingulas fibras copioſiſſimis vbique fibrillis quoque tam firmiter inter ſe mutuo contextas intricatasque habeant, vt vix facilius remoueri a ſe mutuo et diſpelli diuerſae fasciae funesque aut fibrae, quam funes craſſiſſimi ipſi disrumpi poſſe videantur. Haec differentia ergo inter ſtrata externa et media eſt, et cauſa veriſimilis, cur valida ſtrata externa et prorſus completa integraque faſcias non modo et funes, ſed ſingulas fibras quoque, tam firmis nexibus inter ſe mutuo complicatas habeant.

Mediae fibrae in faſcias maximam partem diſpoſitae.

Non magis media ſtrata quam externa ſimplices, quibus conſtructa eſſent, fibras habent, ſicuti ſcriptoribus viſum eſt; ſed faſcias plurimam partem aut faſciculos mediae fibrae collectae efficiunt, ortu, inſertione, directione fibrarum, immo interſtitiis quoque frequenter, diſtinctas, quibus ſuper ventriculos ductis ſingula ſtrata formantur; vt tanquam diuerſi musculi hae faſciae non minus quam in ſtratis externis conſiderari poſſint.

Nexus ſtratorum inter ſe: celluloſa.

Quamuis manifeſto, non celluloſae, ſed verae carneae, fibrillae ſint, quibus in externo ſtrato fibrae faſciaeque, aut faſciculi, fibrarum tam variis inter ſe connectuntur modis; minime tamen omnem celluloſae texturae interuentum inter fibras faſciasque, omnemue eius in cordis carnes inſertionem negauero, quam caeterum tenuiſſimam omnino et vix obſervabilem eſſe celluloſam oportet. Verum ſi vllibi in ipſa ſubſtantia cordis celluloſa datur; inter ſtratum id medium et externum eſt ventriculi dextri. Adeo ſcilicet facile, adeo accurate, externum hoc ſtratum a medio ſecedit. Haec facilis ſolubilitas enim alterius ab altero ſtrato, qua plane illaeſae integraeque fibrae ſtratorum, atque fere intactae, conſeruantur, miro modo mihi, aliud prorſus, quo ſtrata ſecum cohaerent inuicem, vinculum eſſe, aliud, quo fibrae inter ſe connectuntur

tur ſtrati eiusdem, demonſtrare videtur. Atque eandem fere facilitatem quoque in ſoluendis ſtratis fibrarum ventriculi ſiniſtri obſeruaui. Verum in ſtratis dextri ventriculi, dum a ſe mutuo ſoluebantur, frequenter etiam contigit, vt fibrillas manifeſto obſeruarem, iis in ſedibus maxime, vbi in diuerſas faſcias fibrae ſtrati medii diſtinctae erant. Hae ſatis longae quidem fibrillae in ſedibus iis, lineasque facile ſuperantes duas, obſeruatae; vt de exiſtentia earum nullum prorſus dubium ſupereſſe poſſit. Quamuis etiam ſingulari qualitate illae, de qua continuo dicam, donatae eſſent, veram tamen celluloſae ſpeciem imprimis diſpoſitio, ſitus, directio et figura demonſtrabant. In interſtitia enim, vt monui, maxime inter duas vicinas faſcias medii ſtrati a ſtrato vsque externo deſcendebant, faſcias diſtinguendo, videbanturque ad internum penetrare ſtratum, quod pariter ſcilicet cum inferiori, ſicut exterius cum ſuperiori, ſuperficie medii connecterent. In qua diſpoſitione ſituque et vſu nemo non facile telam cognoſcit celluloſam. Certum ergo omnino eſt, vera celluloſa textura et diſtincta eſſe a ſe inuicem diuerſa in ventriculis ſtrata fibrarum, vt fibris illaeſis facile ſeparari alia ab aliis poſſint, et connexa tamen quoque inter ſe mutuo, vt vnum ventriculum firmum ſimul ſumta efficiant.

Fibrillis ſemicarneis.

Verum iſtae quidem longiores fibrillae quibus faſciae a faſciis in medio ſtrato ventriculi dextri diſtinguebantur, quaeque in interſtitia deſcendebant faſciarum, colore erant rubro, ſubfuſco, ſimili prorſus fibrarum muſcularium colori. Neque in corde recenti ſolum rubrae, ſed fuſcae quoque, vt ſolent fibrae muſculares, in corde apparebant, diutius in aqua detento, ex quo omnis pridem ſanguis extractus elotusque fuerat. Vt ſi ex colore quidem iudicares, veras omnino crederes carneas

neas fibrillas; cui rei tamen tota textura earum et habitus et diſpoſitio refragantur. Si meam breuibus dicere licet ſententiam, ſemicarneas quaſi eſſe exiſtimo fibrillas eas celluloſas, quae aliquo ſcilicet gradu irritabilitatis donatae ſuum pariter in cordis actione ſymbolum, ad contractionem et attenuationem ſtratorum in ſpecie, conferant. Sunt exempla, vbi albae etiam celluloſae ſubſtantiae irritabilitas abnegari non poteſt. Atque in corde adeo alacris haec vita eſt, vt ex ipſis carneis fibris eam etiam in proxime illas circumdantem celluloſam propagari quodammodo poſſe, nullo modo improbabile videatur. Si quis eiusmodi tranſitus ſubſtantiarum in corpore animali aegre forte tulerit, cui aliud quippe fibra muſcularis, aliud prorſus celluloſa eſſe videretur, in eo quoque concedendo facilis ero. Nimirum verae carneae tum illae fibrillae rubrae erunt, a ſtrato externo ventriculi dextri in interſtitia faſciarum medii ſtrati deſcendentes; nec medium quid ergo inter fibram muſcularem et celluloſam dabitur. At hoc tamen minime negari poterit, munere et vſu fibrillas eas fungi ipſius verae celluloſae, quibus faſciae ſcilicet a ſe mutuo diſtinguuntur, et ſtrata fibrarum inter ſe connectuntur. Denique ſiue carneas eas fibrillas, ſiue celluloſas, eſſe putaueris, minime confundere tamen eas cum iis oportet, quibus in ſtratis ventriculorum externis, imo et in mediis frequenter fibrae cum vicinis fibris, faſciaeque et fasciculi cum vicinis faſciis faſciculisque cohaerent. Hae enim manifeſto muſculares fibrillae ſunt aut fibrae, cum maximam partem ex fibris fibrillae ſecedant vicinis, quae hactenus eam fibram effecerant, in vicinasque tranſeant fibras, continuentque in iis, eas nunc porro vicinas fibras efficiendo. Vt eandem fibrillam primo in aliqua fibra inter ſolitas huius fibrillas deſcendere, dein ſecedere ab illa et in vicinam oblique tranſire, eaque ratione nectentem efficere fibrillam, denique et in hac poſteriori vicina fibra porro

porro continuare inter ſolitas huius fibrillas, videas; vnde nullum, quin iſtae quidem carneae ſint, dubium eſſe poteſt. Verum et aliud in ſtratis externis nectentium fibrillarum genus datur, quae e latere alterius fibrae in latus alterius tranſeunt quidem oblique, at minime vel ex fibrillis deriuantur fibrae prioris, vel in poſterioris fibrae continuant fibrillas. *a*) Hae quidem aut parum aut nihil a rubris fibrillis, quibus ſtrata connectuntur, differre videntur. Atque mea ſane ſententia vtrumque hoc genus celluloſa ante fuit, deinde in carneam ſenſim abiit naturam.

a) Vide Diſſertationum de Ordine fibrarum cordis tertiam et quartam, vbi de fibrillis nectentibus agitur.

CINERVM CLAVELLATORVM ROSSIAE ITEMQVE CINERVM BETVLINORVM EXAMEN CHEMICVM.

Inſtituit
J. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 26 *Apr.* 1787.

Cineres clauellati (Potaſche R. поташъ) ſyluarum noſtrarum productum, reſpectu ſaponificinae et commercii externi, adeo curae dignum et aureum eſt, vt non exiguum operae pretium ſit eius cognitioni impendiſſe operam, noſtrisque ab exteris paratas comparaſſe. Id ergo mihi propoſui.

Plurimae Cinerum clauellatorum apud nos fabricae in mediis Roſſiae prouinciis, Penſinenſi, Nowogorodenſi inferiore, Caſanenſi, reliquis, vbi copioſae frondiferarum arborum ſylvae, Betula, Populo tremula, Acere, Tilia, Sorbo, ſimilibus ſcatentes abundant, cineribus collectis per ruſticos, e combuſtis paſſim vel e propoſito vſtis aceruatim lignis ſuppleri ſolent. Obſeruante Cel. *Pallas*, hae fabricae nuperis temporibus ad meliorem methodum inſtructae ſunt.

Singulae tribus quatuorue magnis ahenis lixiuium propriis vaſibus paratum excoquunt et ad ſiccitatem perductum in furno

furno peculiari adſpirante ad albedinem calcinant. Cinerum annuo ſpatio mille et quingenti vel mille octingenti modii, Ruſſis *Tſchetwert* dicti, ſeu duodecim ad quindecim millia pondo ruſſica (quadraginta ſingula librarum) conſumitur, et cinerum clauellatorum pondo e ſingulo fere modio parari ſolet. In genere vero, his pariter et aliis fabricis quotannis ingens vis cinerum clauellatorum paratur; etenim praeter id, quod inquilinis ſaponificinis et vitrariis officinis, copioſe impenditur, vno anno v. gr. 1786. ad exteros per Portum Petropolitanum ſolum triginta nouem millia, octingenta triginta tria pondo exportata ſunt et quotannis inter 35 et 45 mille pondo exportantur; aeque minus copioſe haec merx per Rigenſem, Reualenſem, Archangelopolitanum, aliosque portus extra fines mittitur.

Varietates cinerum clauellatorum, quae apud nos vulgo proſtant, ſunt:

1. *Cineres clauellatae non depuratae*, peculiari modo in focis, lixiuium igni infundendo, paratae, ſeu cineribus mixtum et ſemicalcinatum Alcali, paruis glebis concretum, admodum cauſticum, et Belgis, ad dealbanda lintea, vulgaribus cineribus clauellatis, quas Sueci ſuo titulo: *Balaſche* exportant, ob maiorem ſalini proportionem praelatum; Ruſſis vero *Ardaſch tertiae bonitatis* audit. Qui debiliori lixiuio ſaturati ſunt cineres a mercatoribus vulgo *Brak* vocatur nec in glebas effecti ſunt.

2. *Cineres clauellati* rudiori excoctione parati, ſecundae bonitatis, tantum *non calcinati*.

3. *Cineres perlati*, Ruſſis, adſcito germanico nomine *Perlaſch*, ſeu primae bonitatis, calcinatione dealbati, reliquis puriores,

riores, attamen multis etiamnum heterogeneis inquinati. Huius datur ſpecies inter reliquos purior, Sali Tartari ſatis ſimilis; Galli praeſertim hanc, licet vulgari duplo cariorem, pro fabricis ſuis coëmunt.

In experimentis, quibus has cinerum clauellatorum varietates ſubieci, pondus centum vnciarum generatim adhibui, facilioris calculi et comparationis cauſa. Proceſſus fere in omnibus ſimplex fuit, vt expoſitione eorum ampliore non ſit opus.

I. Cineres clauellati non depurati.

Obſcura et ſordida erat, partim in glebis, partim ſoluta, admodum humida.

Centum vnciae huius, bulliente aqua elixiuiatae, reſiduam terram argilloſam et lapillos praebuerunt ad vncias 12.

Cinerum mortuorum - - - - -	$37\frac{1}{2}$.
Arenae quartzoſae - - - - -	$2\frac{1}{2}$.
adeoque quisquiliarum - - -	52 vncias.

Lixiuium filtratum flaueſcentis erat coloris, foetoris expers, neque argento polito vapore ſuo ſplendorem ademit.

Sub eius euaporatione leni, praecipitabatur ſubinde pulvis ſalinus, quem decantatione et filtro ſeparabam. Maſſa ſalina tandem in ſtatum ſiccitatis redacta triginta octo vnciarum fuit; iterum vero ſoluta, euaporata et ſubſidente puluisculo priuata rediit ad pondus vnciarum 30. idque purum erat Alcali vegetabile.

Sepa-

Separatus puluis ſalinus poſt ablutionem et exſiccationem quinque cum dimidia vncias pependit. Coctus in aqua in ſolutione ſex drachmas largitus eſt Tartari vitriolati; ſalini praeterea nihil.

Portio non ſoluta in Aqua forti diluta, cum efferueſcentia ſoluitur ex parte; ſolutio alcali phlogiſticatum intenſe caeruleum tingit; alcali fixo tandem ſaturata terrae calcareae portionem praebuit, quae edulcorata pondus vnciae et drachmarum ſex aequauit. Non ſolutae ſuperfuerunt vnciae tres, quarum, per fuſionem cum alcali cet. ſilicea natura inuenta eſt.

Amiſſae omnino ſeptem vnciae cum dimidia deperditis particulis et humido a ponderata maſſa reſorpto adtribuendae ſunt.

Ex alia officina deprompti cineres clauellati e centum vnciis praebuerunt

Alcali puri - - - - - - vnc. XXX.

Impura vero merces, quam *Brak* appellari ſupra diximus, tantum dedit Alcali puri - - vnc. XXViij.

II. Cineres clauellati ruditer depurati cinerei.

Cineres clauellati non calcinati in omnibus tabernis, in doliis etiam integris, admodum vnctuoſa, impura et atomis copioſis nigris inquinata eſſe ſolet.

Vnciae centum horum Cinerum continent: Terrae inſolubilis vncias vndecim ex his vncia ſabuli quartzoſi lutriendo ſeparari potuit; reliquum efferueſcebat cum acidis, maximam partem iis ſoluitur et ſolutio cum alcali phlogiſticato intense caerulea euadit. Maior pars huius calcareae, exigua siliceae fuit naturae.

E lixiuio flauescente sub euaporatione puluisculi salini haud parum subsedit; exsiccatum alcali, denuo solutum et euaporatum, purissimum, pondere fuit vnciarum quadraginta quinque.

Separatum ab eodem durante euaporatione sedimentum aqua excoctum dedit Tartari vitriolati vncias XX. terrae salinae non solubilis calcareae simul et siliceae vnc. V. Humoris igitur absorbti et amissae durante operatione pondus fuit vnc. XIX. Ex alia taberna depromptae cineres, puri alcali dederunt vnc. XLVji.

III. Cineres perlati Rossici.

Hae passim caerulescenti, virescenti et flauescenti-albo colore variegati, et satis sordidi coloris, inque omnibus tabernis humiditate vnctuosi esse solent. Odor lixiuiosus.

Vnciae centum aqua bulliente elixiuatae, residuum praebuerunt vnc. vj. drachm. V. Cuius vncia arenae, reliquum terra salina fuit, calcareo-silicea, vt in praecedentibus experimentis.

Lixiuium filtratum sub euaporatione prima, et denuo soluti alcali etiam secunda euaporatione, puluisculum salinum deiecit; depuratum vero Alcali pondere aequauit vnc. XXXViij. ß.

Pul-

Puluisculus praecipitatus excoctione cum aqua praebuit:
Tartari vitriolati vnc. Vj. dr. 1.
Terrae ſalinae ſiliceo calcareae vnc. II.

Superfuit magma alcaleſcens quinque drachmarum, quod partim alcali vegetabile, partim terra calcarea conſtabat.

In hoc experimento amiſſum pondus vnciarum ſeptem et drachmae 1, quod humori cinerum ex parte tribui debet.

Cineres perlati optimi itaque continent in centum vnciis, Alcali puri vnc. LXXXIV.

Tartari vitriolati	- - -	vnc. III. dr. V.
Terrae ſalinae ſiliceo - calcareae	-	vnc. ijß.
Sordium non ſolutarum	- -	vnc. II. dr. III.
Amiſſi ponderis, vt dixi quantitas	-	vnc. Vijß.

Comparatiue ergo ſumtae cinerum clauellatorum Roſſiae varietates ita ſe habent, vt centum vnciae contineant:

Salis Alcali puri e non depurata varietate I.
vnc. XXViij. ad XXXV.
e depurata non calcinata II.
vnc. XLV. ad XL. cum dimidia.
e cineribus perlatis III.
vnc. LXXViij. cum dimid. ad LXXXIV.

Tartari Vitriolati e varietate I. drachm. VI.
e varietate II. vnc. XX.
e varietate III. vnc. VI. drachm. I.

Terrae

Terrae Siliceo calcareae per fortiorem calcinationem alcali ſolutae

e varietate I. vnc. IV. drachm. VI.
e varietate II. vnc. V.
e ciner. perlatis. vnc. II.

Nulla praeterea Salia aliena adfuerunt.

Terrae cinereae partim calcareae, partim ſiliceae, cum arena mixtae

in varietate I. vnc. LII.
in varietate II. vnc. XI.
in varietate III. vnc. VI. drachm. II.

In terris omnium varietatum martialis principii notabile veſtigium.

Humoris abſorpti pondus adfuit

in varietate I. vnc. Vijß.
in varietate II. vnc. XIX.
in varietate III. vnc. Vijß.

Analyſis Cinerum betulinorum puriſſimorum et mixtorum.

Experimenta varia circa cineres betulinos vulgares inſtitui, non ſolum quia Cineres clauellati roſſici maximam partem e lignis betulinis aliisque inter ſyluas mixtis frutetis parari ſolent; ſed etiam quia chemicorum ſententiae circa cinerum naturam admodum differunt, ea nunc occaſione data adjicio.

Sumſi cineres e ſolo betulino ligno in fornace pura paratas, quorum pondo ſeu 40 librae ruſſicae (570 vnciae medicae,

dicae, ſeu lipſienſium pondus $35\frac{1}{2}$ librae) lignorum aëre ſiccatorum 68 ad 70 pondo (Pud) requirebant.

Ex hac cinerum quantitate coctura ſalinae partis extrahi poſſunt vnciae XL. ad XLI. in quibus continetur:

Alcali puri vegetabilis vnc. XXVIII. ad XXIX.
Tartari Vitriolati - vnc. II. drachm. VI.
Terrae ſiliceo-calcareae ex reſolutione maſſae ſalinae vnc. IX.

Terra mortua cinerum, aqua non ſolubilis, plurimam partem acidis reſoluitur et cum alcali phlogiſticato caeruleo tingitur.

Praeter terram calcaream, ineſt etiam pars ſiliceae naturae.

*** *** ***

Pondo Cinerum mixtorum e lignis betulinis, ſimul cum populo, alno, vlmo, aliisque ſpatio decem dierum in fornace combuſtorum, edidit ſalinam maſſam pondere vnciarum XLV. et drachmarum VI.

Haec ſalia mediocri calcinatione in maſſam caerulescentem confluxerunt, cuius pondus erat XLIß. vnciarum.

Dedit haec maſſa puri alcali vnc. XXX.
Tartari vitriolati vnc. II. drachm. VII. cum dimidia.
Terrae ab intermedio Sale ſolutae
a. alcalinae vnc. VII. drachm. IV.
b. Siliceae vnc. I. drachm. I. cum dimid.

Volui ex hac terra, methodo a Clariſſimo *Scheel* in Act. Holmienſibus indicata, ſolutione per acidum nitri et praecipitatione per acidum vitrioli, elicere Magneſiam (*Bitterſalzerde*); nullam vero hoc proceſſu obtinui. Dum poſtea terram calcaream per alcali praecipitatam acido vitrioli diluto vltra modum ſaturarem, ex aqua a ſelenite cryſtalliſata reliqua, ope ſalis alcali veram Magneſiam praecipitaui, quae ad totam maſſam circiter tres drachmas effeciſſe videbatur.

Terra mortua cinerum erat pondere 530 vnciarum et magneti copioſas particulas ferreas largiebatur; feruebat cum acidis et ſoluta alcali phlogiſticatum caeruleo tingebat. Lutriendo non bene in partes diſtinctas ſeparari potuit; igni follibus excitato expoſita intra viginti minuta in vitrum duriſſimum, obſcure caeruleum, transparens, confluxit.

Magneſium (*Braunſtein*), quod Chemici Sueci copioſe cineribus ineſſe perhibent, methodo Clariſſ. *Scheel* in Acta Holmienſ. pro 1774. tradita, fruſtra quaeſiui; praecipitata enim calcinatione tantum cinerca euaſerunt.

Magneſiam albam ſupra indicata ratione etiam ex hac terra elicui, et videbatur in totam maſſam efficere pondus drachmarum quinque granas.

Particulas martiales e minori portione ſolutionis per alcali phlogiſticatum omnino praecititaui et praecipitatam calcinaui; vnde calculo facto prodiit in totam maſſam pondus vnius drachmae cum XLV granis. Videtur autem plus ferri ineſſe, quandoquidem terra etiam ſilicea, acido non ſolubilis, marte euidenter inquinata eſt.

Terrae

Terrae calcareae, ſimul cum exigua magneſiae proportione, pondus erat vnciarum 332 cum 2 drachmis; terrae non ſolubilis vnciar. 89. drachm. 3.

Haec euidenter erat mixta arenulis ſiliceis, et marte admodum inquinata, per ſe non fluxilis, ſed aequali portione ſalis alcali mixta. Vitrum impurum et cum triplo eiusdem ſalis in vitrum deliquescens vertebatur; vt euidenter eſſet terra ſilicea impurior.

MINERALIVM QVORVNDAM RARIORVM RECENSIO, ADIECTIS OBSERVATIONIBVS GEOLOGICIS.

Auctore

J. J. FERBER.

Conuent. exhib. die 2 Iulii. 1787.

Anno proxime praeterlapſo Petropoli diſcedens, Saxoniam, Bohemiam et Vngariam petii, vt nuper detectam artis amalgamatoriae methodum, quam Celeberrimo Bornio debemus, addiſcerem et quae noua e terrae gremio protracta ſunt corpora mineralis proſapiae, poſtquam fertiliſſimae Saxoniae et Status Auſtriaci prouincias plurimis abhinc annis viſitarem, oculis luſtrarem et quorum ſpecimina adquiri poterant, in ius meum conuerterem. Nec ſpem fefellit exſpectatio. Tot tantasque vidi regni mineralis diuitias, Viennae praeſertim cumulatas, tam ſpecioſa, tam perfecta rariorum quoque corporum ſpecimina in variis ibidem Lithophylaciis aſſeruata, vt re ipſa dubitem, an maiorem copiam ſelectioraue exemplaria in alio vllo loco obſeruare liceat. Eminet inprimis Muſeum caeſareum, cura laudati Bornii valde locupletatum ſplendidumque. Succedunt dein collectiones priuatae Celeb. Jacquini, Peithneri, Fichtel, Comitis Wrbna, nobilis Virginis de Raab, Clariſſ. Stützii et quae ſunt reliquae, in quibus omnibus ac ſingulis bene multa extant

tant mineralia hucusque parum cognita, e fodinis praesertim austriaco imperio subiectis, intra decennium et quod excurrit temporis spatium eruta et mineralogorum attentione maxime digna. Amicorum partim beneuolentia, partim quoque apud eos, qui fossilia vendunt, soluto pretio haud leuem rariorum et nouorum mineralium supellectilem mihi comparaui, eo quidem fine vt non modo pristinae collectionis meae molem augerem et ornarem, verum etiam vt minus cognita minusque descripta data occasione in chemicum examen reuocarem et tandem nouae editioni Sciagraphiae Bergmannianae, quam molior, suis locis insererem. Hoc antequam fieri potest, Imperiali Academiae Scientiarum haud ingratum fore spero, si ea, quae attentu maxime digna mihi visa sunt, leui adumbratione in medium proferam. Merentur autem Mineralogorum attentionem non modo fossilia plane noua, i. e. quae noua prorsus genera nouasque species antea non obuias constituunt, cuius indolis haud multa sane in Europa nostra iam amplius detegi possunt; sed ea quoque, quae varietatum nomine veniunt et forma crystallina, colore aliisue notis externis, vel et iam loco natali, a congeneribus differunt. Horum studium, corporum non modo cognitionem extendit, auget, perficit, ideoque flocci faciendum non est, quamuis classificationis fundamentum sola analysi chemica nitatur; sed geographiae mineralogicae commodis multum quoque inseruit, quare veris naturae scrutatoribus curae cordique semper erit. Vno alteroue respectu, ni fallor, notatu dignae sunt varietates fossilium iam recensendae, quas inter nonnullae occurrunt, quas nouas species regni mineralis salutare nullus dubito.

1. *Calx vitriolata* seu *Gypsum radiatum* (Strahlgips) colore rubro e fodinis salis gemmae ad *Tordam* Transyluaniae. Vidi quoque ex *Ischel* in Austria superiore, nec non

 ex

ex *Hiſpania.* Colore albo communiter occurrit; haec vero varietas rubra rarior, eodem ſine dubio principio martiali tincta, quo ſal gemmae ſaepe rubeſcit.

2. *Calx vitriolata* ſeu *Alabaſtrum* albo et violaceo variegatum e *Szamobor* Croatiae. Idem e *Rosznau* Morauiae. Ex his locis antea mihi ignotum fuit; quoniam vero geographia phyſica, in cunis etiamnum vagiens, eo magis promouetur, quo melius omnia ac ſingula corpora mineralia cuiuscunque loci cognoſcimus, quibus cruſta telluris componitur, non ſuperuacaneum, haec loca notare.

3. *Calcareus* montem efficiens prope *Idriam*, in quo vena fragmentis rotundatis agathinis repleta occurrit. Conſiderationem phyſicam potius, quam mineralogicam ſtricte ſumtam, meretur hoc phoenomenon, et ideo hic notatur. Montes nimirum calcarii idrienſes, qui venam ſchiſtoſam, hydrargyrum largiens, fouent, inter primaevos a certis auctoribus numerari ſolent. Quo iure autem ex adductis patet.

4. *Calcareus* vulgo *flos ferri* dictus, pulcherrimis ramificationibus floſculoſis figuratus, e ferri fodina *Sti. Leonhardi* in Carinthia, multum forma differt a flore ferri ſtiriaco, vix autem verbis clare deſcribi poteſt Colore pulchre virideſcenti ad *Schwatz* Tyrol. occurrit.

5. *Calcareus ſpatoſus* ſeu ſpatum calcareum colore viridi e *Boicka* Tranſyluaniae. Duplicans colore violaceo, nec non luteſcente, ex *Hercynia* vidi.

6. *Calx fluorata* vulgo: Fluor mineralis, *forma pulueruleuta* e *Marmaros* Vngariae. Carbonibus ignitis iniectus phosphoreſcit.

Fluor cubicus coloris lutei, marginibus violaceis, ex *Ehrenfriedersdorf* Saxoniae.

Fluor

Fluor cubicus coloris rosacei ex *Heluetia*, in museo caesar. vienensi.

7. *Calx aërata* argillaceo et siliceo inquinata, seu *Marga*, *instar Aluminis crystallisata*. E *Pacherstölln* Schemnitzii.

8. *Spatum ponderosum* solidum amorphum, quartso mixtum et ideo chalybe percussum scintillans, e *Waldstein* prope Faistritz ad fluuium Muhr in Stiria. Venas plumbiferas comitatur. Textura non spatosa, sed solida vel compacta gaudet, quartso vulgari amorpho simile, sed grauitate specifica maiore donatum. *Felsoebaniae* in Vngar. superiore spatum ponderosum occurrit, antimonio intime mixtum et hoc metallo vel minera eius aequabiliter tinctum.

9. *Magnesia vitriolata natiua*, in Serpentino destructo efflorescens, e *Szamobor* Croatiae. Nouam omnino salis natiui speciem, antea non obseruatam constituit.

10. *Lithomarga* quae fistulis tabacariis turcicis inseruit (Meerschaumerde) quoad locum natalem et situm, quo ibi occurrit, nondum satis nota fuit. Inuenitur autem ad *Bruzam* Asiae minoris, non in stratis, sed in venis montium. Argilla quae fistulis tabacariis turcicis rubris inseruit, ad Constantinopolin effoditur, grysei coloris est, sed ignita rubescit.

11. *Steatites* viridis, vulgo lapis nephriticus, crystallisatus: crystallis paruulis polygonis, super serpentino lapide, e *Topschau* Vngar. superior.

12. *Argilla pura* vel terra aluminaris natiua e Lombardia. In globulos concreta ad Halam Saxoniae occurrit; dubium vero est an ibi re ipsa natiua sit, nec ne.

13. *Smaragdus* peruvianus in vena spatoso - calcarea schisti argilla-

gillacei nygri, criſtallis columnaribus hexaëdris, angulis truncatis, i. e. dodecaëdris: planis alternim largioribus. In *Muſeo Pragenſi.* Vidi quoque Smaragdos criſtalliſatos hexaedros in ſimili ſchiſto et ſpato calcareo e *Mexico*, in *Muſeo Dresdenſi.* D. Bogdanoff ante aliquot annos Smaragdos cryſtalliſatos e deſerto *Kirgisenſi* Petropolin attulit. (*)

14. *Schoerlus albus* columnaris craſſitie pollicis, ex Orauitza Bannatus. Cultro tritus in tenebris phosphoreſcit. In minera cupri pyritacea occurrit.

15. *Schoerlus ruber* ad Elbbrunn prope montem Gigantum (Rieſengebirg) Sileſiae.

— — — craſſitie pollicis columnaris in quartſo e *Rewutza* in territorio Comitis Cohari, prope Leitſchau in Vngar. ſuper.

16. *Schoerlus niger* columnaris, cuius columna vnica ponderis eſt librae et 10 lothonum, e *Saar* in Morauia. Huius magnitudinis vere giganteae Schoerli cryſtallum antea nunquam vidi.

17. *Schoerlus niger* columnaris, cui impreſſi ſunt granati criſtallini. Dum euelluntur veſtigia polygoni corporis diſtincte expreſſa in ſchoerlo manent.

18. *Hornblende* columnaris inſtar Schoerli, in Saxo: Murkna, e Zillerthal Tyrol.

19. *Zeolithus ruber* radiatus, colore pſeudogalenae rubrae, in lapide vel calcareo vel ſchiſtoſo-argillaceo, ex *Tranſyluania.*

20. *Zeolithus ruber lamellis hexagonis* criſtalliſatus in Laua montis *Kratſchiuneſt* prope Salatnam Tranſyluaniae. In Amyg-

(*) Colore et facie quidem ſmaragdis ſimiles cryſtallos e ſuperiore Irtis fl. regione aliquoties acceptas vidimus; ſed erant durioris fluoris ſpecies in cryſtallos priſmaticas efficta, nec ad chalybem ſcintillans.

mygdaloide ad eundem locum obuio etiam reperitur. Albi quoque coloris eſt.

21. *Mica* ſiue Talcum lamellis longis planis ſibi inuicem incumbentibus, colore argenteo et coeruleo. Alia varietas colore argenteo et viridi gaudet. E montibus *Carpathicis*, qui Tranſyluaniam et Walachiam ſeparant.

Varietas coerulea in Tyroli, Auſtria et, vt fertur, in monte Gotthardo Heluetiae quoque reperitur. Pro ſchoerlo coeruleo venditatur.

22. *Talcum viridescens*, forma granati, nec non forma Schoerli criſtallinum. Dum finditur intus quoque Talcum eſt, nec in ſuperficie tantum, vt Criſtalli ſic dictae fahlunenſes.

23. *Quartſum* pumicis inſtar *poroſum* et aquae innatans. Montes efficit in territorio neoſolienſi.

24. *Quartſum* amorphum *coerulei coloris*, e Weitſch Stiriae.

25. *Quartſum* pingue *roſei coloris* ad *Rabenſtein* in ſylua Frauenau dicta, prope Zwiſel in Bauaria.

26. *Quartſum lactei coloris figura rhomboidali.* Huius forma admodum particularis eſt. Lamellae chartae ſubtiliſſimae craſſitie rhomboiden formant intus cauam. Intra maiorem minor exiſtit priore occulta, parietibus diſtantibus. Luſum naturae dicas, ſi vis; ſed quo modo formatus? In muſeo caeſar. vienenſi occurrit, *Cremnitzio* oriundum.

27. *Quartſi Criſtalli* hexagonae quidem, vt eſſe ſolent, ſed curuae aut inflexae, ex *Delphinatu*, prouincia Galliae.

28. *Calcedonius* criſtalliſatus: pyramide hexangulari ex Hüttenbergenſibus ferri fodinis Carinthiae.

29. *Calcedonius hexaëdro-priſmaticus*: *apice pyramidali* e fodinis Thereſiae et Maximiliani prope Schemnitzium.

30. *Calcedonius radiatus* concentricus, Zeolithi inftar cryftallifatus.

— — — *filiformis*, *tubulofus*, et *acerofus*, ex iisdem fodinis.

31. *Calcedonius coerulei coloris* vel *amorphus*, vel *cubicus*, vel *rhomboidalis*. Omnes varietates ad *Trceftian* prope Kapnik Tranfyluaniae occurrunt; prima autem infuper ad *Torotsko* Tranfyluaniae, in fodina ferri.

32. *Calcedonius coerulei coloris opalizans*, in lapide fic dicto piceo flauo ad *Zahm* et *Arat* in Vngaria fuper. verfus limites Tranfyluania.

33. *Opalus* et *Lapis mutabilis* e *Radomifchel* in Polonia. Opali ifti colorum elegantia et variatione illos aemulantur, qui ad Peklin in Vngaria fuper. effodiuntur.

34. *Lapis mutabilis* (Weltauge) in lapide piceo ad Peklin Vngar. fup. Maculas format in hoc lapide, quae aqua humectatae euanefcunt.

35. *Lapis mutabilis* qui calore redditur diaphanus. Eft lignum quoad partem petrefactum et lapide piceo albo imbutum, aeris iniuriis diu expofitum, haud procul Cremnitzio reperiundum.

36. *Lapis piceus* (germanice Pechftein) colore *viridi* e montibus *carpathicis*.

— — — colore obfcure *flauo* ad *Iacobian*, vbi ferro fundendo fluoris inftar additur.

— — — *flauo* et *brunneo* ex infula Elba maris tyrrheni.

— — — *flauo* et *rubro* ad *Mungatfch* in Vngar. fup. Flavus 36 libras ferri in centenario continet.

36. *Lapis piceus rubro* ad *Hermannſtadt* Tranſyluaniae.

—— —— —— *coeruleo* ad *Nagyag* Tranſylu. Teſte D. Fichtel libras quatuor plumbi in Centenario continet.

—— —— —— *flauo* et *rubro* ad Zahm et Arat in Vngaria in confinio Tranſyluaniae.

—— —— —— *roſeo* vel carneo ad *Peklin* prope Caſchauiam Vngar.

—— —— —— *luteo* in agris prope *Engelſchauſen* in Bohemia.

—— —— —— *omnium fere colorum* ad *Telkobanyam* in Vngaria ſuperiore, in ſaxi metalliferi varietate porphyrea: nigra vel rubra, magna copia reperitur.

37. *Aurum natiuum* in gypſo ſpatoſo l. ſelenitide e Trzeſtian in Tranſyluania.

38. *Auri minera Nagyagenſis* reticulata (geſtrickt).

39. *Argentum natiuum columnare*: columnis hexaëdris compreſſis, ſeu planis duobus oppoſitis largioribus, angularibus anguſtioribus  e fodinis *Fürſtenbergenſibus*. In muſeo Pragenſi.

40. *Argentum* cum ferro, arſenico et antimonio, ſulphure *larvatum*, vulgo Federerz, colore perfecte griſeo; e Felſöbania in muſeo D. Stütz Vienae.

41. Argentum acido ſalis laruatum ex Peru, e Delphinatu, e Windiſch Leithen Schemnizii et e ſano mariae Alſatiae.

42. *Argentum molybdaeno et ferro* adunatum tenues lamellas format, quibus ſuper, charta ſcribi poteſt. Locus: *Deutſch Pilſen* in Vngaria: noua forſan ſpecies.

43. *Hydrargyrum* argento adunatum, *Amalgama naturale*, in Palatinatu interdum occurrit; nuper autem in fodina Andreae prope Zlanam in Comitatu Gomorienſi Vngariae repertum eſt.

44. *Hydrargyrum ſulphure adunatum*, forma tantum cinnabarina hucusque in fodinis ſeſe prodiit; in fodina *Heibuſch* autem prope *Kirchheim* Naſſauiae forma pulueris nigri, qui, dum arte paratur, *Aethiops mineralis* audire ſolet, occurrit, teſtante Lithophylacio lib. Bar. de Raknitz, Dresdae.

45. *Plumbum* ochraceum ſ. Calx plumbi natiua, gryſea e *Bannatu.*

46. *Plumbum ſulphure mineraliſatum* ſeu galena plumbi cryſtallis vtrinque pyramidalibus, absque columna, e fodinis *Bleibergenſibus* Carinthiae.

47. *Plumbum ſulphure min.* ſ. *galena* plumbi *octoëdra* ex eodem loco.

48. *Plumbum ſulphure min.* ſ. galena *cubica* quidem, angulis vero obliteratis rotundatis, quaſi igne fuſa, guttulis propendentibus; e *Radiborzitz* Bohemiae.

49. *Plumbum acido aut aëreo aut phoſphorico mineraliſatum*, vulgo: plumbum ſpatoſum,

a) *amorphum* colore *aurantio* ex Risbanya Hungar. ſup.
ex Annaberg in Auſtria.
luteo: ex Risbanya
e Bleiberg Carinthiae.
caeruleo: ex Risbanya
albo: ibidem
roſeo: e fodinis plumbiferis ad Mies Bohemiae.

b) *cry-*

b) *criſtallinum cubicum lutei ex aurantii* colonis e Bleiberg et Risbania *polygonum* e variis iam memoratis locis.

Obſeruatio. Plumbum ſpatoſum luteum e cuniculo Mathaei ad Bleiberg in Carinthia vidi, parrulas cochleas continens ex genere Helicis Linnaei. Cochleae iſtae cum plumbo ſpathoſo nihil quidem commune habent; cum vero mons Bleiberg dictus lapide calcareo eius indolis conſtet, quem primaerum vocitare ſolent oryctographi nonnulli, praeſentia helicum aliarumue cochlearum petrefactarum hic omnino argumento eſt, illam denominationem et characterem, quo fulcitur, lubrico admodum niti fundamento. Conferantur ea, quae ſupra dicta ſunt No. 3.

50. *Plumbum acido ſalis* mineraliſatum, *Plumbum corneum*, in fodis plumbiferis ad *Mies* et *Bleiſtadt* Bohemiae nuper detectum eſt, et nouam certe ſpeciem conſtituit.

51. *Cuprum calciforme rubrum*, vulgo *flos Cupri* dictum, in tenuiſſimos capillos vel quoque ſquamas ſpatoſai effloreſcens ad *Saskam* Banatus temiſcenſis iam occurrit; olim tantum e fodina Larentii freibergenſi et ex alia quadam fodina in territorio Colonienſi innotuit.

52. *Cuprum cum argilla, acido muriatico mineraliſatum*, Mica viridis Saxonum in mineris cupri, quas piceas et teſtaceas vocant, in Banatu temiſienſi frequens obſeruatur. Colore ſaturate viridi, pallidiore et demum luteſcente variat. Vidi quoque ex Sibiria.

53. *Ferrum arſenico adunatum*, vulgo Misſpickel, in *Röderzeche* Carinthiae ſuperioris occurrit, quod auri lothones viginti in Centenario continet.

54. *Martis minera haematitica nigra*: criſtallis pentagono-pyramidalibus, e territorio Schnebergenſi Saxoniae.

55. *Ferri minera phlogiſtica* Cronſtedti (Eiſenbrandertz) aurum et argentum ſimul continens, e cuniculo Michaelis Schemnizii, ſuper ſchiſto nigro argillaceo et galena plumbi.

56. *Aethites martialis* figura cubica e Banatu temiſienſi.

57. *Arſenicum ſulphure mineraliſatum*, rubrum et flauum natiuum e Buckowina.

Idem ad Gumiſcanam in Georgia.

—— e cuniculo Ioſephi Walachorum in confinio Banatus.

58. *Cobaltum acido arſenici mineraliſatum* vulgo flos Cabalti, *colore viridi* e fodinis Cobalti ad Topſchau in Vngaria ſuperiore. Cabalti minerae variae bonae notae et magna copia iam in hac prouincia effodiuntur et ad *Kloknitz* prope Schottwien, locum, qui aliquot milliaria Viena diſtat, in vitrum caeruleum l. Schmaltam conuertuntur. Rarius Cobaltum in *Banatu*, inter Dognaskam et Bogſchan occurrit.

59. *Zincum cum ferro*, *ſulphure mtneraliſatum* (Pſeudogalena) tunicei (Scherbenkebold) ſed minoribus, e *Raibel* Carinthiae. Cultro.

60. *Zincum cum ferro* etc. ſeu *Pſeudogalena* ſtriata in lapide calaminari e Dognaska Banatus.

61. *Zincum cum ferro* etc. vel *Pſeudogalena* criſtalliſata, *lutea*: *columnis* priſmaticis hexagonis, 2 pollicum longitudine, e fodina Scharfenbergenſi Saxoniae. Pſeudogalenam columnarem antea nunquam vidi.

62. Zin-

62. *Zincum cum ferro* etc. vel *Pſeudogalena* cryſtallina, *colore Rubini diaphano*, nec opaco obſcuro, qualis frequens occurrit. L. fodina *Freibergenſi*, quae rubra dici ſueuit.

63. *Zincum forma metallica ſulphuratum Cronſtedti* e *Felſobanya* Vngaria ſuperioris, in nec non e fodina cupri iam relicta ad *Stepanoff* in Morauia.

64. *Zincum aëratum*, vulgo ſpatoſum aut ſpatum zincinum colore caeruleo; idem colore viridi, ad Bleiberg in Carinthia.

65. *Antimonium cum arſenico*, *ſulphure mineraliſatum*, vulgo: Antimonium *rubrum* olim tantum e fodinis Braundorſo-freibergenſibus innotuit; iam vero non ſolum Cremnitzii in ſubſtantia interiore minerae antimonii griſeae ſeſe prodit, verum etiam haud procul Presburgo, ad *Malazkam*, ſpeciminibus elegantioribus comparuit.

66. *Antimonium album* nominare liceat, donec chemice determinari poterit, mineram prorſus nouam, nouam inquam antimonii ſpeciem, in fodinis plumbiferii ad *Przibram* Bohemiae obuiam, a nullo quod ſciam, mineralogo antea deſcriptam. Conſtat vero calce antimonii alba acido vel aëreo, vel alio quodam nondum examinato, mineraliſata aut criſtalliſata. Colore eſt albo ſubargenteo nitente. Cryſtalli lamellis componuntur parallellogrammaticis, baſi cohaerentibus, ex centro-quaſi divergentibus. Inſident galena plumbi. In muſeo Pragenſi vidi poſtea calcem antimonii albam natiuam ex Felſobnya; ingne autem forſan in fodina productam, vbi ligno accenſo petram emolliunt. Vidi demum criſtallos columnares ibidem aſſeruatas ex eadem fodina Felſobanyae, plumbo ſpatoſo albo ſimiles, quae fide Clariſſimi Zauſchner antimonium continent, ideoque anti-

antimonii iam deſcripti albi varietatem conſtituunt. Dari quoque calcem antimonii natiuam colore aurantio, quam pro Kerme minerali natiua habent, in ſcriptis nonnullis legi.

67. *Magneſium calciforme induratum*, intus radiatum, quod gravitate ſpecifica tam exigua gaudet, vt aquae innatet, ex *Hüttenberg* Carinthiae.

68. *Granites* in quo quarzum caeruleum, colorem lapidis Laruli initatur, e montibus ad *Waldbach* prope Griglach in ſtiria.

69. *Porphyrius* niger vel ruber, aëre deſtructus, quaſis ad Peklin in Vngaria Opalis verſicoloribus matrix eſt, continens la pidem ſic dictum piceum et minimas cochleas heliciformes petrefactas. Eſt vero hic Porphyrius nihil aliud quam ſtratum ſecundarium e deſtructo ſaxo metallifero ortum. Ex Vngaria.

70. *Laua vitrea criſtalliſata*: dodecaëdro-pyramidata, lateribus concauis. Ad Tokay in Vngaria, vulgo Luchshaphier aus Tokay. Rariora ſunt eiusmodi ſpecimina lavae vitreae criſtallinae tokayenſis, nec exacte locum inquirere potuit, vbi inueniuntur. Laua vitrea informis autem ibi ſtratum peculiare efficit in terra vulcanica tuffacea prope Toka. Eiusmodi ſtrata vel venas lauae vitreae, minus largas tamen, in collibus cinerum vulcanicorum territorii vicentini, in Italia olim obſeruaui.

71. *Laua* hinc inde *columnaris vel baſaltina*, ſchoerhur viridem columnarem et Chryſolithos continens, e monte *Jeſpenberg* dicto, psope *Reichenberg*, in circulo bunzlavienſi Bohemiae. Inueniuntur etiam Chryſolithi fruſtula maiora forma rotunda et rotatione aquarum detrita in agris ad *Moldautheim* in Bohemia.

72.

72. *Terra vulcanica indurata*, *Trafs* dicta, quae ramos vegetabiles in carbonem conuerſos includit, ex *Andernach* ad Rhenum, omne tollit dubium de origine lapidis huius molaris rhenani.

73. *Ichthyolithus* vel piſcis petrificatus in gypſo. Vidi in muſeo nobilis virginis de Raab, Vienae. De exiſtentia corporum petrefactorum in gypſo diu dubitarunt auctores mineralogi.

74. *Lignum foſſile auriferum*, colore nigro, in breccia ſilicea cuniculi Zecheriani ad Kirnik Tranſyluaniae occurrit. Centenarius huius ligni lothones 2 auri continet.

PETREFACTA IGNOTA.

Auctore
BAS. ZUYEW.

Conuent. exhib. d. 1 *Nouembr.* 1787.

Inter innumera offamenta, quae per Europam, Roffiam ac Siberiam borealem animalium plagae mundi prorfus alienorum effodiuntur, quaeque cuilibet Naturae indagatori non minus mira vifuntur, ac fi noftri Rosmari, vel vrfi albi reliquiae in planis Indiae reperirentur, offero hic duo frufta: vnum, quid fit diuinare nequaquam potui; alterum eft cornu animalis hucusque ignoti et forte plane vlterius non exiftentis. Reperta funt ambo in minera ferri alba prope Ienifeiskum in Siberia, vnde translata funt mihi primum fub nomine pifcis petrefacti, alterum dentis Rosmari. Vtriusque exhibita breui defcriptione figuras adiiciam, quibus luculentius patefcat, quid fagacioribus naturalium rerum inueftigatoribus de iis fit fentiendum.

Tab. V. Fig. 1. 2. 3. Maffa minerae ferri albae oblonga, in medio cylindrica, fuperficie planiori, ad apicem anteriorem vtrinque depreffa, ad pofteriorem compreffa et adtenuata. Hanc fi verticaliter

ter inſpicias, ſimilem ſe praebet ligoni, cuius apices vnus alteri exaduerſo compreſſi; ſi horizontaliter, refert aliquem piscem ignotum, cuius roſtrum depreſſum, medium ventricoſum, cauda vero compreſſa, elongata, adtenuata; ſi vero deſuper intuearis, tunc perfecte figuram habet linguae alicuius beſtiae groſſioris. Superficies huiusce maſſae vndiquaque laeuis, exceptis paucis locis, vbi arena quartzoſa inaequalis ſe adferruminauerit, veſtita quaſi cortice ferrugineo, in medio dorſo duplo craſſiori, quam ad apicem vtrumque aut ſubtus; malleo percuſſa corticem facile per fruſta dimittit. Interior compages perfecte ſolida, aequalis, fuſca, extrorſum parum flaueſcens, ſulcis transuerſis vt cingulis, totum corpus ambientibus, varie diſtantibus, parallelis, ſubtus retrorſum inflexis. Linea lateralis, ſi piſcem repreſentare velis, ad caudam ſolummodo viſibilis, caeterum inconſpicua, recta, vel parum flexuoſa, tendit per medium latus ad dimidium vsque corporis. Longitudo totius maſſae 1 pedis 2 pollicum 3 linearum. Latitudo ſumma in medio corporis, (nam ad caput ſenſim ſenſimque diminuitur, verſus caudam vero ſubito et inſigniter adtenuatur,) $3\frac{1}{2}$ pollicum. Altitudo in medio corporis $3\frac{1}{2}$ pollicum. Circumferentia in loco craſſiori 10 pollicum.

Tabula ſexta repraeſentat cornu animalis ignoti, quod immerito habitum eſt pro dente Trichechi Rosmari. Illud rectum eſt, ad radicem parum incuruatum, annulis aetatem animalis deſignantibus ad nouendecim conſpicuis; ab vno latere cylindricum, ab altero per totam longitudinem planum, vel ſulco lato excauatum, verſus apicem adtenuatum; ſuperficie inaequali, ſtriis ſulcisue maioribus minoribusque longitudinalibus exarata, cinerea, hic-ibi ſabulo exaſperata. Subſtantia interna compacta, ſolida, fuſca, cortice veſtita diſtincto con- Tab. VI. Fig. 1. 2.

concolori, qui, non plus quam vnius lineae craſſitiei, malleo percuſſus facile decidit fruſtatim. Longitudo 1 ped. 2 poll. Circumferentia in medio $\frac{1}{2}$ pedis.

Nota. Reperta ſunt haecce foſſilia in minera ferri alba, quae ſingularem habet proprietatem, vt ego ipſe expertus ſum, in libero aere diutius iacendo magis et magis nigreſcendi, hinc non eſt cur miremur, foſſilia haec ſolo ſuo natali exemta colorem fuſcum induiſſe.

DIAN-

DIANTHI NOVI HYBRIDI.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Conuent. exhib. d. 3 Decembr. 1787.

EXP. I.

Dianth. *plumar. Sibir.* *) ♀.
Dianth. *barbatus*, ♂.
Fl. ſatur. carmeſ.
Vid. Exp. inuerſ. II.
Anno 1764. d. 8 Iun. Flor. 4.
it. Anno 1768. d. 27 Aug. Flos 1.

Deſcriptio.

Plantae anno 1765, 1767 et 1769 ex hac copula enatae plurimae, in vniuerſum omnes eiusdem inter ſe habitus ac formae: praeterquam quod earum nonnullae caulibus paullo altioribus eſſent inſtructae, quam caeterae, floresque aliarum colore prae aliis pallidiore notati. Compoſitis prius denſis foliorum faſciculis, florebant omnes anno inſequenti ab initio Maii vsque ad Iunii medium. Folia quaſi graminea, coloris obſcure nec viuide virentis, ſpiſſiorisque ſubſtantiae; longiſſima eorum $4\frac{1}{2}$ poll. pariſ. aequabant, ac circa maximam ipſorum latitudinem $2\frac{1}{4}$ lin. lata erant: comparatione itaque fa-

*) Vid. Dritte Fortſ. der vorläuf. Nachr. u. ſ. w. S. 89.

facta, prae iis ♀, intensius quidem, sed minus splendide virentia, longiora, multoque latiora; prae iis ♂ autem non adeo splendide virentia, longa, rigidiuscula, multoque angustiora.

Caules satis erecti ac rigidi, eiusdemque cum foliis coloris: attamen altiores, crassiores, rigidiores ac erecti magis, quam ♀; ast humiliores, graciliores, flexibiliores, nec adeo recti, quam ♂. Fasciculi florum notabiliter densiores, copiosiores, sibique inuicem viciniores, quam ♀; sed multo laxiores, inordinati, magisque dissiti a se inuicem, quam ♂.

Squamulae calycis non quidem ita obtusae ac breues, quam ♀, sed quoque non adeo longae, setisque minus conspicuis terminatae, quam ♂. Calyx ipse paullo breuior, minus cylindraceus, inque segmenta angustiora diuisus, quam in ♀; ast paullo longior, minus ventricosus, oreque latioribus nec ita acutis dentibus instructo, quam ♂. Color florum plus minusue pallide carmesinus, non sine omni venularum profundius tinctarum vestigio, punctulisque albicantibus obiter tantum superspersus.

Flores ipsi minores, minusque fimbriati, quam ♀; ast maiores, nec limbo, vt in ♂, simpliciter crenati, sed, more ♀, satis profunde incisi. Limbus petalorum minus oblongus quidem, quam in ♀, nec tamen ita subrotundus, ac in ♂. Puluis antherarum, qui in ♀ albus, in ♂ vero e coerulescenti viridis est, e cinereo albicans, pluribusque effoetis ac vacuis, quam bonis particulis constabat. Stamina omnium horum florum semper vna cum stigmatibus in conspectum prodibant. Capsulae foecundatae nec ita cylindraceae, quam ♀, neque adeo ventricosae, quam ♂; earundemque longitudo ac crassities inter ♀ et ♂ media. Plurimae earum vacuae penitus,

pau-

pauciores uno alteroue ſemine nigro, ad adſpectum bono foetae, cuius impraegnationis cauſa ſine dubio in parentibus, in vicinia earum collocatis, quaerenda fuiſſet.

EXP. II.

Dianth. *barbatus*, ♀.
Dianth. *plumar. Sibir.* ♂.
Anno 1772. d. 4 Iun. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. 1.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1773 inde procreatae plures, anno ſequenti demum floruere: ab iis Exper. inuerſi haud multum diſcrepantes.

EXP. III.

Dianth. *deltoid.* ♀.
Dianth. *Armer.* ♂.
Anno 1765. d. 16 Iun. Flor. 2.

Deſcriptio.

Prouentus ſeminum ex hac copula ſatis copioſus. Plantae ann. 1766, 1767 et 1768 inde prognatae plures, mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis. Capſulae harum ſponte natae ſemina pauca bona continebant.

EXP. IV.

Dianth. *barbat.* ♀.
Dianth. *Armer.* ♂.
Anno 1765. d. 22 Iun. Flor. plur.

Deſcrip-

Descriptio.

Plantae anno 1766 et 1767 inde enatae paucae, mediam inter ♀ et ♂ similitudinem monstrabant.

EXP. V.

Dianth. *plumar. Sibir.* ♀.

Dianth. *superb.* ♂.

Anno 1772. d. 17. Aug. Flor. 2.

Descriptio.

Plantae anno 1773 inde prognatae plures, partim iam mense Septembr. partim vere anni sequentis demum floruere: mediae inter vtrumque parentem similitudinis ac formae.

EXP. VI.

Dianth. *hortens.* ♀.

Fl. pallid. cinnabar.

Dianth. *plumar. Sibir.* ♂.

Anno 1772. d. 5. Iul. Flor. 5.

Descriptio.

Plantae anno 1773 ex hac copula productae plurimae, anno insequenti demum floruerunt, mediamque inter ♀ et ♂ proportionem ac formam per omnia tenuêre.

EXP. VII.

Dianth. *hortens.* ♀.

Varior. color.

Dianth. *ferrug.* ♂.

Anno 1773. d. 21. Iul. Flor. 11.

Vid. Exp. inuers. VIII.

De-

Descriptio.

Plantae anno 1774. ex hac copula enatae plures; in vniuersum omnes inter ♀ et ♂ mediae similitudinis ac formae. Floruit earum vna iam Augusto mense: Floribus boli Armenae colorem referentibus; caeterae omnes altero demum anno florescentiam suam peragebant.

EXP. VIII.

Dianth. *ferrug.* ♀.
Dianth. *hortens.* ♂.
Varior. color.
Anno 1773. d. 13. Iul. Flor. 6.
Vid. Exp. inuers. VII.

Descriptio.

Plantae anno 1774. inde prognatae plures, iis Exper. inuersi in vniuersum satis similes. Earum nonnullae floribus plenis, pallide rubicundis ornatae.

EXP. IX.

Dianth. *superb.* ♀.
Dianth. *ferrug.* ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 15.

Descriptio.

Plantae anno 1774. inde procreatae plurimae, mediam inter vtrumque parentem tenebant proportionem, ac, vti priores Exp. VII. et VIII. vestigia flaui coloris, qui ferrugineo proprius est, satis manifesta monstrabant.

EXP. X.

Dianth. *ſuperb.* ♀.
Dianth. *chinenſ.* ♂.
Anno 1764. d. 25 et 28. Iul. Flor. 6.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1765 et 1768. inde prognatae plurimae, in vniuerſum ab iis Exp. inuerſi (*a*) haud abludebant.

EXP. XI.

Dianth. *ſuperbus* ♀.
Dianth. *barbatus* ♂.
Anno 1764. d. 23. Iul. Flos 1.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1765. ex hac copula enatae plures, mediam inter vtrumque parentem prae ſe ferebant faciem. Flores earum pallide carmeſini, punctis obſoletis albicantibus adſperſi. Maculae pallide virentes, pilorumque puniceorum non pauci ad regionem ſolitam. Capſulae harum plantarum ſponte natae vt plurimum vacuae, pauciſſimae ſemine vno alteroue nigro qualitatis dubiae foetae.

EXP. XII.

Dianth. *ſuperbus* ♀.
Dianth. *carthuſianor.* ♂.
Anno 1764. d. 29. Iul. et d. 17. Sept. Flor. 9.

De-

(*a*) Vid. Dritte Fortſ. der vorläuf. Nachr. u. ſ. w. S. 69. §. 40. XLI. Verſuch.

Descriptio.

Copula haec parcam tantummodo feminum foecundorum copiam mihi suppeditabat, e quibus anno insequenti enatae sunt plantae duae, mediae inter ♀ et ♂ conformationis, ac valde luxuriantes. Vtraque floruit anno 1766. mense Iunio ac Iulio. Flores earum pallide carmesini. Macula pallide viridis, cum striis tribus rubicundis, ad regionem solitam, pilisque sat longis puniceis obsita. Limbus petalorum profunde incisus. Puluis antherarum coloris incani, particulis maxima ex parte bonis constans.

EXP. XIII.

Dianth. *chinensis* ♀.
Dianth. *pungens*. ♂.
Anno 1773. d. 5. Aug. Flor. 3.
It. Anno 1774. d. 23. Aug. Flor. 4.

Descriptio.

Plantae anno 1774 et seq. inde prognatae plurimae: mediae inter ♀ et ♂ similitudinis ac formae.

EXP. XIV.

Dianth. *superbus* ♀.
Dianth. *pungens*. ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 8.

Descriptio.

Plantae anno 1774 inde procreatae plurimae, mediam inter vtrumque parentem, vti assolent hybridae primigeniae, similitudinem exhibebant. Flores earum tam magnitudine in vniuersum, quam longitudine fimbriarum corollae illis ex barb.

♀. et ſuperb. ♂. prognatis ſimillimi. Color albicans, in rubicundum inclinans vtplurimum. Circa baſin limbi corollae maculae viridiusculae, cum pilis rarioribus, puniceis. Puluis antherarum griſeus.

EXP. XV.

Dianth. *hortenſis* ♀.
Dianth. *pungens*. ♂.
Anno 1773. d. 23. Iul. Flor. 3.

Deſcriptio.

Plantae anno 1774 ex hac copula prognatae perpaucae, ſequenti demum floruere. Flores earum ex rubro et albo ſtriati, ac in ſummo gradu ſteriles.

VARIETAS HYBRIDA.

EXP. XVI.

Dianth. *glaucus* ♀.
Dianth. *deltoides* ♂.
Anno 1765. d. 11. Iun. Flor. 8.

Deſcriptio.

Plantae anno 1766. inde procreatae plures, ac inſequenti florentes, in ſummo gradu foecundae erant; itaque vna pro mera alterius varietate naturali habenda.

SOREX

SOREX CAECVTIENS.

Auctore

E. LAXMANN.

Conuent. exhib. die 12 *Maii* 1785.

Pondus	drachm. I.	gr. V.
Longitudo tota poll. Lond.	III.	lin. IX. ß.
—— capitis ad nucham		IX.
—— roſtri		III.
—— a naſo ad ortum caudae	II.	V.
—— caudae	I.	IV. ß.
—— Brachiorum		III. ß.
—— palmae		II. $\frac{1}{4}$.
—— tibiarum		VI. —
—— plantae		V.
Circumferentia capitis maxima	I.	I.

Corpus *Sorice minuto* paulo groſſius et hirſutius.

Naſus roſtratus, ſupra hirſutie fuſcus, infra pallidus. Dentes fuſco rubentes, nitidiſſimi, obtuſiuſculi, rotundati.

Myſtaces copioſi, rigidiuſculi, mediocres.

Oculi minimi, vellere plane abſconditi, nec niſi detracta cute conſpicui, ſemine papaueris longe minores, ſinui oris proximi, caecutienti animalculo vix non fruſtranei.

Auriculae nullae, pori auditorii maiuſculi, ſurſum directi, in vellere deliteſcentes, collo proximi.

Collum breuiſſimum.

Corpus teretiuſculum; artus tenues, pedes pentadactyli, gryſei, vnguibus concoloribus.

Cauda longitudine fere trunci, tenuis, murina, ſupra fuſca, ſubtus gryſea.

Color velleris ſupra fuſcus, pilis denſiſſimis, ſubtus ab ore ad caudam caeruleſcenti-canus.

Habitat in Sibiria ad lacum Baikal.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

ÉCLAIRCISSEMENS
SUR
LE MÉMOIRE DE Mr. DE LA GRANGE,
INSÉRÉ DANS LE Ve. VOLUME DE MÉLANGES DE TURIN, CONCERNANT LA MÉTHODE DE PRENDRE LE MILIEU ENTRE LES RÉSULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS, &c.

Par
M. L. EULER.

Présenté à l'Académie le 27 Nov. 1777.

Qu'on concoive un Quart-de-cercle tel que, lorsqu'on s'en sert pour observer, par exemple, la hauteur du Pole, après avoir fait un grand nombre de telles observations il se trouve a observations qui donnent cette hauteur exacte, b observations qui la donnent d'une minute trop grande, et enfin c observations qui la donnent trop petite d'une minute; desorte que le nombre de toutes ces observations soit $N = a + b + c$, parmi lesquelles il y en ait a où l'erreur est $= + 1$ & c où l'erreur est $= - 1$.

Un tel Quart-de-cercle étant supposé, quand on aura fait n observations pour déterminer l'élevation du pole, la declinaison d'une étoile, ou quoi que ce soit, parmi lesquelles on aura pris un milieu, ſelon la manière ordinaire, en ajoutant tous les réſultats enſemble & diviſant la ſomme par le nombre des obſervations n; on demande: quelle ſera la probabilite, que ce milieu donne exactement la vraye hauteur cherchée, ou que la ſomme de tous les réſultats donne exactement zero? & enſuite: quelle ſera la probabilité que la ſomme de tous les reſultats devienne ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, ou $+3$, ou -3; &c.?

Pour repandre plus de lumière ſur cette queſtion, on n'a qu'à concevoir pluſieurs billets dont le nombre ſoit $N = a + b + c$ & qui ſoyent marqués a par 0, b par $+1$ & c par -1. Que de ces billets renfermés dans une boite, on tire, au hazard, ſucceſſivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré dans la boite, & l'on pourra demander: quelle ſera la probabilité, que la ſomme de tous les nombres tirés ſucceſſivement ſoit ou 0, ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, &c. où il eſt d'abord clair que cette ſomme ne ſçauroit jamais ſupaſſer ou $+n$, ou $-n$. De cette manière la queſtion propoſée pourra aiſement être réſolue par la Théorie des Combinaiſons, en ſuppoſant d'abord $n = 1$, enſuite $n = 2$, $n = 3$, &c.

Soit donc $n = 1$, ou qu'on ne tire de la boite qu'un ſeul billet, & il eſt évident, qu'il y aura a cas où le nombre tiré peut être 0, b cas où il peut être $+1$ & c cas où il peut être -1; donc puiſque le nombre de tous les cas eſt $a + b + c = N$, la probabilité que le nombre tiré ſoit 0 ſera $\frac{a}{N}$, la probabilité qu'il ſoit $+1$ ſera $\frac{b}{N}$ & celle enfin qu'il ſoit -1 ſera $\frac{c}{N}$, & puiſqu'ici on ne tire qu'un ſeul billet il n'y a pas de milieu à prendre.

Soit

Soit $n = 2$, ou qu'on tire de la boite deux billets successivement, & quel que soit le nombre du premier, le second pourra être celui de chaque billet dans la boite, en sorte que chaque billet tiré d'abord admet N variations, d'où l'on voit que le nombre de tous les cas possibles sera $N^2 = (a+b+c)^2$. Or cette formule étant développée donne $aa + bb + cc + 2(ab + ac + bc)$, dont le premier terme aa exprime le nombre des cas où les deux billets tirés sont $o + o$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{aa}{N^2}$. Ensuite le second terme bb marque le nombre des cas où les deux billets tirés seront $+1 + 1 = +2$, dont la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$. Le troisième terme cc marque le nombre des cas où les nombres des billets tirés seront $-1 - 1 = -2$, dont la probabilité $= \frac{cc}{N^2}$. De la même manière le quatrième terme $2ab$ exprime le nombre des cas, où l'un des nombres tirés est o & l'autre $+1$ & partant leur somme $= +1$, dont la probabilité $= \frac{2ab}{N^2}$. Le terme $2ac$ est le nombre des cas où il arrive que les nombres des deux billets tirés sont o & -1, & partant la somme $= -1$, dont la probabilité $= \frac{2ac}{N^2}$. Enfin le dernier terme marque le nombre des cas où ces nombres tirés sont $+1$ & -1, leur somme partant $= o$, & la probabilité en est $\frac{2bc}{N^2}$.

Puisque ici nous avons deux billets, la somme des deux nombres tirés dans chaque cas étant divisée par 2, donne le milieu dont nous avons parlé ci-dessus, & partant la probabilité que ce milieu soit $= o$, sera $\frac{aa + 2bc}{N^2}$. Que ce milieu soit $+1$, la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$; qu'il soit -1, elle sera $\frac{cc}{N^2}$. Or il peut aussi arriver que ce milieu soit $+\frac{1}{2}$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{2ab}{N^2}$; & enfin pour le milieu $-\frac{1}{2}$ la probabilité est $\frac{2ac}{N^2}$.

 Suppo-

Suppoſons maintenant $n = 3$, & puiſque chacun des cas précédens, dont le nombre étoit N^2, peut être ſuivi de chacun des N billets, le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^3 = (a + b + c)^3$, dont nous devons conſidérer tous les termes qui réſultent du développement de cette formule, & chacun exprimera le nombre des cas qui produiſent les trois nombres tirés, dont on aura par conſéquent tant la ſomme que le milieu, en la diviſant par trois, auquel il ſera aiſé d'ajouter la probabilité, qui ſe trouve en diviſant chaque terme par le nombre de tous les cas poſſibles, c'eſt à dire par N^3. Nous repréſenterons tous les cas dans la table ſuivante:

Termes.	Nombres.	Somme	Milieu.	Probabilité.
a^3	$0+0+0$	0	0	$\frac{a^3}{N^3}$
b^3	$1+1+1$	3	1	$\frac{b^3}{N^3}$
c^3	$-1-1-1$	-3	-1	$\frac{c^3}{N^3}$
$3aab$	$0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3aab}{N^3}$
$3aac$	$0+0-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3aac}{N^3}$
$3abb$	$0+1+1$	$+2$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{3abb}{N^3}$
$3acc$	$0-1-1$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3acc}{N^3}$
$6abc$	$0+1-1$	0	0	$\frac{6abc}{N^3}$
$3bbc$	$+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3bbc}{N^3}$
$3bcc$	$+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3bcc}{N^3}$

On voit de cette table que le milieu $= 0$ s'y rencontre deux fois, la probabilité en ſera par conſéquent $= \frac{a^3 + 6abc}{N^3}$. Enſuite elle montre que le milieu $\frac{1}{3}$ ſe rencontre deux fois, & partant la probabilité ſera $\frac{3aab + 3bbc}{N^3}$. Or que ce milieu devienne $-\frac{1}{3}$ la probabilité ſera $\frac{3aac + 3bcc}{N^3}$. La probabilité pour le milieu

$+\frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3}$ sera $\frac{3abb}{N^3}$; pour $-\frac{2}{3}$ elle sera $\frac{3acc}{N^3}$. Pour que le milieu devienne $+1$ la probabilité est $\frac{b^3}{N^3}$ & pour qu'il soit -1 il y aura la probabilité $\frac{c^3}{N^3}$.

De la même manière parcourons le cas où $n=4$, & où par conséquent on tire quatre billets, & il est clair que le nombre de tous les cas possibles sera $N^4=(a+b+c)^4$. Developpant donc cette formule, on verra aisément tant ces quatre nombres tirés, répondans à chaque nombre, que leur somme & leur milieu, qui avec la probabilité seront représentés dans la table suivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^4	$+0+0+0+0$	0	0	$\frac{a^4}{N^4}$
$4a^3b$	$+0+0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b}{N^4}$
$4a^3c$	$+0+0+0-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c}{N^4}$
$6aabb$	$+0+0+1+1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb}{N^4}$
$6aacc$	$+0+0-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc}{N^4}$
$12aabc$	$+0+0+1-1$	0	0	$\frac{12aabc}{N^4}$
$4ab^3$	$+0+1+1+1$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$12abbc$	$+0+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12abbc}{N^4}$
$12abcc$	$+0+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{12abcc}{N^4}$
$4ac^3$	$+0-1-1-1$	-3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
b^4	$+1+1+1+1$	$+4$	$+1$	$\frac{b^4}{N^4}$
$4b^3c$	$+1+1+1-1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4b^3c}{N^4}$
$6bbcc$	$+1+1-1-1$	0	0	$\frac{6bbcc}{N^4}$
$4bc^3$	$+1-1-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4bc^3}{N^4}$
c^4	$-1-1-1-1$	-4	-1	$\frac{c^4}{N^4}$

Dans cette table en trouve 9 milieux différens dont quelques uns ſe rencontrent deux & même trois fois. Nous marquerons donc dans la table ſuivante pour chacun de ces milieux la probabilité qui lui répond:

Milieu	Probabilité.
0 - - -	$\frac{a^4 + 12\,aabc + 6\,bbcc}{N^4}$
$+\frac{1}{4}$ - - -	$\frac{4\,a^3 b + 12\,abbc}{N^4}$
$-\frac{1}{4}$ - - -	$\frac{4\,a^3 c + 12\,abcc}{N^4}$
$+\frac{1}{2}$ - - -	$\frac{6\,aabb + 4\,b^3 c}{N^4}$
$-\frac{1}{2}$ - - -	$\frac{6\,aacc + 4\,bc^3}{N^4}$
$+\frac{3}{4}$ - - -	$\frac{4\,ab^3}{N^4}$
$-\frac{3}{4}$ - - -	$\frac{4\,ac^3}{N^4}$
$+1$ - - -	$\frac{b^4}{N^4}$
-1 - - -	$\frac{c^4}{N^4}$.

La conſidération de ces quatre cas nous ouvre la route à la queſtion générale, où le nombre des billets tirés eſt $= n$; car d'abord il eſt évident que le nombre de tous les cas poſſibles eſt ici $N^n = (a + b + c)^n$, dont le développement n'a aucune difficulté. Mais pour nous diſpenſer de la conſidération de chacun des termes qui en réſultent, nous conſidérons ici la forme générale de chacun de ces termes, qui ſoit $M\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma$, où la ſomme des expoſans $\alpha + \beta + \gamma$ doit être $= n$ et pour trouver le coéfficient M de ce terme, la Théorie des Combinaiſons nous fournit cette formule:

$$M = \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\ldots\, n}{1.\,2.\,\ldots\,\alpha\,.\,1.\,2.\,\ldots\,\beta\,.\,1.\,2.\,\ldots\,\gamma}.$$

Or les nombres tirés qui répondent à ce terme ſeront $0.\,\alpha$

$+ 1.$

$+ 1 . \beta - 1 . \gamma$ & partant le milieu de ces nombres tirés sera $\frac{\beta - \gamma}{n}$, auquel répond la probabilité $\frac{M\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Puisque la somme de tous les nombres tirés qui repondent à ce terme est $0 . \alpha + 1 . \beta - 1 . \gamma$, on voit que si nous écrivions au lieu des lettes a, b, c ces formules: $a\, x^{0}$, $b\, x^{+1}$, $c\, x^{-1}$, le terme que nous considérons prendroit cette forme: $M\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, x^{\beta - \gamma}$, de sorte que l'exposant de x nous donneroit d'abord la somme de tous les nombres tirés. Pour cet effet on n'a qu'à développer cette puissance: $(a\, x^{0} + b x^{1} + c\, x^{-1})^{n}$, & chacun de ses termes, qui aura, comme nous venons de voir, la forme $M\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, x^{\beta - \gamma}$, nous donne pour le milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$, et la probabilité sera $\frac{M\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Or on comprend aisément que ce même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$ peut résulter de plusieurs termes différens, d'où par conséquent il faudra tirer la probabilité qui repond à chacun, & la somme de toutes ces probabilités donnera la probabilité pour le même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$. Pour trouver tous les termes affectés de la même puissance de x, je tâcherai de donner une méthode qui nous dispensera de ramasser tour ces termes par le développement actuel; mais auparavant je parcourrai successivement les cas où l'exposant de x devient où 0 ou ± 1, ou ± 2, ± 3. Et d'abord pour le premier, où le milieu est $= 0$, il faudra mettre $\beta = \gamma$, desorte que les termes suivans, qui produisent ce même milieu, feront a^{n}, $a^{n-2}\, b\, c$, $a^{n-4}\, b^{2}\, c^{2}$, $a^{n-6}\, b^{3}\, c^{3}$, $a^{n-8}\, b^{4}\, c^{4}$, qu'il faut continuer jusqu'à ce que les exposans de a deviendront négatifs, & de ce que nous avons observé il sera facile d'assigner à chacun de ces termes son coëf-

coëfficient; par conséquent la somme de tous ces termes divisée par N^n donne la probabilité entière pour que ce milieu ait lieu.

De la même manière, pour que le milieu en question devienne $\frac{1}{n}$, où l'exposant de x, sçavoir $\beta - \gamma$, devient $= 1$; tous les termes qui y conduisent, à cause de $\beta = \gamma + 1$ & $\alpha = n - 2\gamma - 1$, seront exprimés par les formules suivantes: $a^{n-1}b$, $a^{n-3}b^2c^1$, $a^{n-5}b^3c^2$, $a^{n-7}b^4c^3$, &c. dont la somme, après y avoir joint leurs coéfficiens, divisée par N^n donne la probabilité pour ce milieu $\frac{1}{n}$. De même pour que le milieu devienne $-\frac{1}{n}$, & partant $\beta - \gamma = -1$, on aura $\gamma = \beta + 1$ & $\alpha = n - 2\beta - 1$, d'où les termes qui produisent ce milieu seront: $a^{n-1}c$, $a^{n-3}bc^2$, $a^{n-5}b^2c^3$, $a^{n-7}b^3c^4$, $a^{n-9}b^5c^4$, &c.

Si l'on veut que le milieu se trouve $= +\frac{2}{n}$, ou qu'il soit $\beta - \gamma = 2$, et partant $\beta = \gamma + 2$ & $\alpha = n - 2\gamma - 2$, tous les termes qui produisent ce milieu seront $a^{n-2}b^2$, $a^{n-4}b^3c$, $a^{n-6}b^4c^2$, $a^{n-8}b^5c^3$, $a^{n-10}b^6c^4$, &c. Or pour que le milieu soit $-\frac{2}{n}$, les termes qui le produisent, à cause de $\beta - \gamma = -2$ & partant $\alpha = n - 2\beta - 2$, seront $a^{n-2}c^2$, $a^{n-4}bc^3$, $a^{n-6}b^2c^4$, $a^{n-8}b^3c^5$, $a^{n-10}b^4c^6$, &c. où l'on doit continuer ces formules tant que l'exposant de a demeure positif; & il est très-facile de continuer cette opération pour tous le milieux différens qui peuvent avoir lieu.

Maintenant il sera très-aisé de résoudre cette question en général, lorsque le Quart-de-cercle est supposé tel que parmi un très grand nombre N d'observations, il y en ait a qui ayent la même erreur $= \alpha$, b observations qui produisent la même erreur $= \beta$, c observations qui ayent la même erreur

erreur $= \gamma$ & d obſervations dont l'erreur ſoit $= \delta$, &c. où α, β, γ, δ, marquent en général des nombres quelconques poſitifs ou négatifs, de ſorte qu'on ait

$$N = a + b + c + d + e + \&c.$$

Cela poſé ſi l'on veut ſçavoir la probabilité, qu'ayant fait n obſervations, la ſomme de tous les nombres tirés (ſuppoſant qu'à chaque obſervation réponde un billet, comme ci-deſſus) ſoit ou 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou en général λ, on n'a qu'à développer cette puiſſance:

$$(a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + d x^\delta + \&c.)^n$$

& à prendre la ſomme de tous les termes affectés par la même puisſance x^λ, qui étant diviſée par N^n, donnera la probabilité qui convient à la ſomme de tous les nombres tirés $= \lambda$, ou bien à leur milieu $\frac{\lambda}{n}$. Toutes ces opérations ſe feront ſans aucune difficulté, de la même manière que nous l'avons enſeigné ci-deſſus.

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS FORTALITII MOSDOK DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS ANNO 1785 A THEODORO TCHERNOI INSTITVTIS.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 5 *Mai* 1788.

Absolutis obseruationibus pro definiendo situ Geographico praecipuorum Chersonesus Tauricae locorum Vir Celeb. Theodorus Tchernoi inter suscepit ad Caucasum, vt dubiam praesertim Longitudinem Fortalitii Mosdok indubitatis stabiliret obseruationibus. Animus illi fuerat definiendi positionem non nullorum aliorum ibidem locorum, verum valetudo aduersa a proposito eum desistere coegit.

Die $\frac{2}{13}$ Oct. repetita in Mosdok verificatione quadrantis ad horizontem errorem illius obtinuit altitudinibus obseruatis addendum $11'. 23''$, eundem fere quem antea Sewastopoli repererat.

Deter-

Determinatio Latitudinis Mosdok.

Dies obferu.	Nomina Stellarum.	Altit. error. quadr. corr.	Refra-ctio.	Declin. Aberr. et Nutat. Corr.	Latitudo.
25 sept. / 6 oct.	β Cygni	73°.48′.27″	17″	27°.31′.27″ b	43°.43′.17″
	α Aquilae	54. 36. 12	41	8. 18. 49	43. 18
	ε Delphini	56. 52. 51	38	10. 35. 25	43. 12
	γ Delphini	61. 39. 14	32	15. 22. 4	43. 22
26 sept. / 7 oct.	β Cygni	73. 48. 27	—	- - -	43. 43. 17
	α Aquilae	54. 36. 5	—	- - -	43. 25
	ε Delphini	56. 52. 40	—	- - -	43. 23
	γ Delphini	61. 39. 8	—	- - -	43. 28
	ε Pegafi	55. 11. 30	39	8 54 15	43. 24
27 sept. / 8 oct.	β Cygni	73. 48. 17	—	- - -	43. 43. 27
	α Aquilae	54. 35. 58	—	- - -	43. 32
	ε Delphini	56. 52. 44	—	- - -	43. 19
	γ Delphini	31. 39. 12	—	- - -	43. 24
	ε Pegafi	55. 11. 27	—	- - -	43. 27
3/14 Oct.	α Aquilae	54. 35. 55	—	- - -	43. 43. 35
	ε Delphini	56. 52. 47	—	- - -	43. 16
	γ Delphini	61. 39. 4	—	- - -	43. 23
	ε Pegafi	55. 11. 31	—	- - -	43. 32

Praeter altitudines ftellarum fixarum captae funt non nullae altitudines meridianae Solis, verum referendis iis fuperfedeo, quia Latitudo Fortalitii inde refultans eadem fere prodit, quam praebent obferuationes ftellarum; fumto vero ex fupra relatis medio prodit Latitudo Fortalitii Mosdok 43°. 43′. 23″.

Determinatio Longitudinis Mosdok.

	Temp. Horol.	Temp. ver.	Altit.
Die $\frac{29}{10}$ $\frac{sept.}{oct.}$ meridies verus ex altitudinibus ☉ correſpondentibus - - -	$0^h.14'.23'',9$		
— Emerſ. I. ſatell. ♃ -	12. 38. 13	$12^h.23'.12''$	45°
Coelo ſereno.			
Die $\frac{1}{12}$ Oct. merid. ver. ex altitudinibus ☉ correſpondentibus - - - - -	12. 16. 46		
— Emerſ. I. Satell. ♃ - -	7. 9. 47	6. 52. 41	20
— Emerſ. II. Satell. ♃ - -	15. 22. 53	15. 5. 22	31
vtraque coelo ſereno.			
Die $\frac{3}{14}$ Oct. meridies verus ex altitudinibus ☉lis correſpondentibus - - -	0. 19. 7,6		

In Collectione obſeruationum in obſeruatorio Pariſino Anno 1785 inſtitutarum mihique benigne ab Illuſtri Comite Caſſini transmiſſarum Eclipſibus Satellitum Iouis hic recenſitis ſequentes reperio correſpondentes

Die $\frac{29}{10}$ $\frac{sept.}{oct.}$	Emerſ. I. Satell. ♃	$9^h.37'.25''$	Pariſiis.
		12. 23. 12	Mosdok.
	Differ. merid. -	2. 45. 47	
Die $\frac{1}{12}$ Oct.	Emerſ. II. Satell. ♃	12. 19. 6	Pariſiis.
	Eadem	15. 5. 22	Mosdok.
		2. 46. 16	

Ex

Ex his binis determinationibus ſumendo medium prodit Longitudo Mosdok a meridiano Pariſino computata $2^h. 46'. 2''$, vel cum obſeruatio primi Satellitis maioris praeciſionis capax, pro vſu Geographico ſatis ſuperque exacte Longitudo Mosdok ſtatui poterit $2^h. 46'$. ſiue $38°. 10'$ a meridiano Pariſino, et $58°. 10'$. a meridiano primo.

Die $\frac{29}{10}$ $\frac{sept.}{oct.}$. Declinatio acus magneticae obſeruata eſt $6°. 40'$. verſus occidentem.

REMARQUE
SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE
DE TROUVER
L'ANOMALIE EXCENTRIQUE
PAR
L'ANOMALIE MOYENNE.

PAR
NICOLAS FVSS.

Présenté à la Conférence le 5 Mai 1788.

On trouve dans le Ephémerides astronomiques que M. l'Academicien Bode publie annuellement à Berlin, Année 1789, page 191, une methode de M. Klügel, pour déterminer l'Anomalie excentrique par l'Anomalie moyenne. Ce Géomètre y donne, pour cet effet, une progression, dont les membres sont les sinus des multiples de l'Anomalie moyenne, & dont les coéfficiens sont aussi des progressions, qui ont pour termes les puissances de l'excentricité. Cette expression est, à la verité, très-convergente; mais cela n'empêche pas qu'elle ne soit bien incommode dans l'application, parceque chaque coéfficient est composé de plusieurs membres, qui sont des fractions de puissances des l'excentricité; & ces fractions ont, en partie, d'assez grands nombres pour numerateurs & dénominateurs, ce qui fait que la formule demande des calculs longs & desagreables. Voici cette expression

$$\nu = \omega - (e - \tfrac{1}{8} e^3 + \tfrac{1}{192} e^5) \text{ fin. } \omega$$
$$+ (\tfrac{1}{2} e^2 - \tfrac{1}{6} e^4 + \tfrac{1}{48} e^6) \text{ fin. } 2\,\omega$$
$$- (\tfrac{3}{8} e^3 - \tfrac{27}{128} e^5) \text{ fin. } 3\,\omega$$
$$+ (\tfrac{1}{3} e^4 - \tfrac{4}{15} e^6) \text{ fin. } 4\,\omega$$
$$- \tfrac{125}{384} e^5 \text{ fin. } 5\,\omega + \tfrac{27}{80} e^6 \text{ fin. } 6\,\omega$$
&c.

où ν marque l'Anomalie excentrique, ω l'Anomalie moyenne & e l'excentricité.

La méthode fuivante de trouver, par approximation, l'Anomalie excentrique, l'Anomalie moyenne étant donnée, eft à la fois & plus fimple dans l'expreffion & plus facile dans le calcul. En gardant les mêmes dénominations, comme il y a $\nu = \omega - e \text{ fin. } \nu$, fi l'excentricité eft une partie affez-petite du grand axe de l'orbite, comme elle l'eft pour toutes les Planètes, on pourra d'abord mettre $\nu = \omega$, & l'on aura plus approchamment $\nu = \omega - e \text{ fin. } \omega$. En mettant cette valeur à la place de ν dans l'expreffion $\omega - e \text{ fin. } \nu$, on aura encore plus exactement

$$\nu = \omega - e \text{ fin. } (\omega - e \text{ fin. } \omega),$$

une valeur encore plus jufte naîtra en fubftituant celleci, & l'on aura

$$\nu = \omega - e \text{ fin. } [\omega - e \text{ fin. } (\omega - e \text{ fin. } \omega)],$$

& de cette manière on pourra continuer la fubftitution, jusqu'à ce que l'expreffion aura l'exactitude requife, ce qui ne manquera jamais d'arriver après peu d'opérations.

En défignant ces valeurs approchantes par les caractères ν', ν'', ν''', &c. on aura pour l'Anomalie excentrique

$\nu' =$

$$\nu' = \omega - e \text{ sin. } \omega$$
$$\nu'' = \omega - e \text{ sin. } \nu'$$
$$\nu''' = \omega - e \text{ sin. } \nu''$$
$$\nu'''' = \omega - e \text{ sin. } \nu'''$$
&c.

valeurs dont le suivant est toujours plus approchant que celui qui le précède, & à l'aide desquelles on pourra, même pour des excentricités considérables, calculer l'Anomalie excentrique, moyennant quatre ou cinq opérations seulement. Car ν'''' donne l'Anomalie juste en secondes pour Mercure, c'est à dire pour celle de toutes les Planètes qui a la plus grande excentricité.

Soit, par exemple, la distance moyenne de Mercure au Soleil $= 1$ & supposons l'Anomalie moyenne $\omega = 86°, 26', 11''$, il y aura $e = 0, 20563$, & en reduisant ce nombre en secondes, $l\,e = 4, 62751$. Cela remarqué, voici le calcul:

l sin. $\omega = 9, 99904$ $l\,e = 4, 62751$ $l\,e$ sin. $\omega = 4, 62655$	e sin. $\omega = 42321''$ $\omega = 310285$ $\nu' = 267964''$ ou bien $\nu' = 74°, 26', 4''$
l sin. $\nu' = 9, 98377$ $l\,e = 4, 62751$ $l\,e$ sin. $\nu' = 4, 61128$	e sin. $\nu' = 40859''$ $\omega = 310285$ $\nu'' = 269426''$ ou bien $\nu'' = 74°, 50', 26''$
l sin. $\nu'' = 9, 98462$ $l\,e = 4, 62751$ $l\,e$ sin. $\nu'' = 4, 61213$	e sin. $\nu'' = 40938''$ $\omega = 310285$ $\nu''' = 269347''$ ou bien $\nu''' = 74°, 49', 7''$

l sin.

$l\,\text{ſin.}\, v''' = 9,98457$	$e\,\text{ſin.}\, v''' = 40934''$
$l\,e = 4,62751$	$\omega = 310285$
$l\,e\,\text{ſin.}\, v'''' = 4,61208$	$v'''' = 269351''$
	ou bien $v'''' = 74^\circ, 49', 11''$

Il y a donc ici l'Anomalie excentrique $v = 74^\circ, 49', 11''$, valeur qui ſatisfait exactement à l'équation $v = \omega - e\,\text{ſin.}\, v$.

Pour Venus, dont l'excentricité eſt ſeulement $e = 0,00706$, on aura $l\,e = 3,16323$. En prenant donc l'Anomalie moyenne $\omega = 21^\circ, 54', 45''$, on aura à faire le calcul ſuivant:

$l\,\text{ſin.}\, \omega = 9,57193$	$e\,\text{ſin.}\, \omega = 543''$
$l\,e = 3,16323$	$\omega = 78885$
$l\,e\,\text{ſin.}\, \omega = 2,73516$	$v' = 78342$
	ou bien $v' = 21^\circ, 45', 42''$
$l\,\text{ſin.}\, v' = 9,56908$	$e\,\text{ſin.}\, v' = 540''$
$l\,e = 3,16323$	$\omega = 78885$
$l\,e\,\text{ſin.}\, v' = 2,73231$	$v'' = 78345$
	ou bien $v'' = 21^\circ, 45', 45''$

Valeur qui ſatisfait dejà parfaitement à l'équation $v = \omega - e\,\text{ſin.}\, v$ & donne l'anomalie excentrique juſte jusqu'aux ſecondes $v = 21^\circ, 45', 45''$, & ſi l'Anomalie moyenne eſt plus grande, une ſeule operation ſuffira pour trouver l'Anomalie excentrique.

Cette méthode ſi ſimple & ſi facile n'eſt pas nouvelle: elle appartient, ſi je ne me trompe, à feu M. Euler, qui au moins en a dejà fait mention, il y a plus de 50 ans, dans un Mémoire inſéré au XII^e Volume des Commentaires de notre Académie pour l'Année 1740, intitulé: *Emendatio Tabula-*

 rum

rum astronomicarum per loca Planetarum Geocentrica. Mais elle est comme enfouie dans cette dissertation, où personne ne la cherche; cependant les moyens d'exprimer l'Anomalie excentrique par l'Anomalie moyenne ne sont pas sans utilité, & celui ci merite surtout d'être mieux connu qu'il ne paroît l'être, parce qu'il la fournit, comme on voit, par un calcul très-court & très-aisé; c'est pourquoi j'ai crû devoir saisir l'occasion que m'a présenté l'expression de M. le Professeur Klügel, pour en renouveller la mémoire.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG.
EN L'ANNÉE MDCCLXXXV.

Suivant le nouveau Stile.

Présenté à l'Académie le 24. Avril 1788.

Je renvois encore le lecteur au premier volume de ces nouveaux Actes pour la déscription & l'expofition de mes Inftrumens météorologiques, ainfi que pour ma maniere d'obferver le variations que les changemens d'atmosphère y produifent: je paffe donc tout de fuite aux tables mêmes qui repréfentent les conclufions principales tirées de mes obfervations.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.81	21.	6. s.	27.41	7.	9. s.	140	28.11	28.173
Février	28.87	12.	1. s.	27.00	28.	minuit	187	27.93	28.150
Mars	28.35	3.	midi	27.38	27.	8. s.	97	27.86	27.784
Avril	28.64	30.	7. m.	27.22	1.	10. m.	142	27.93	28.037
Mai	28.28	13.	9. m.	27.37	16.	minuit	91	27.82	27.856
Juin	28.23	5.	3. s.	27.44	3.	10. s.	79	27.83	27.830
Juillet	28.13	25.	3. m.	27.21	12.	3. m.	92	27.67	27.714
Août	28.24	5.	4. s.	27.56	29.	5. m.	68	27.90	27.863
Sept.	28.36	13.	midi	27.22	26.	9. s.	114	27.79	27.857
Octobr.	28.34	6.	9. m.	27.56	26.	3. s.	78	27.95	27.931
Novembr.	28.48	15.	3. m.	27.16	17.	10. m.	132	27.82	27.859
Décembr.	29.04	17.	1. s.	27.38	29.	8. m.	166	28.21	28.449

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle; avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours	h.	27. 90 jours	h.	28. 00 jours	h.	28. 10 jours	h.	28. 20 jours	h.	Baromètre, un demi-mois au dessus de Pouces.	cent.
Janvier.	28.	3	26.	3	23.	0	20.	9	15.	12	28.	20
Février	25.	9	21.	18	18.	12	16.	15	12.	15	28.	16
Mars	14.	0	10.	6	6.	0	2.	21	1.	9	27.	76
Avril	23.	12	20.	0	16.	3	10.	0	7.	15	28.	01
Mai	16.	9	13.	6	10.	9	5.	21	3.	12	27.	82
Juin	16.	18	12.	6	7.	0	2.	15	1.	3	27.	84
Juillet	11.	18	7.	18	3.	21	0.	15	0.	0	27.	76
Août	18.	18	13.	21	7.	21	1.	12	0.	15	27.	88
Sept.	17.	18	13.	21	9.	21	7.	0	3.	12	27.	86
Oct.	22.	6	17.	15	11.	15	6.	3	3.	9	27.	93
Nov.	17.	0	14.	0	8.	21	5.	0	2.	15	27.	86
Déc.	27.	18	26.	15	25.	3	23.	18	22.	0	28.	55

3.) Variations considérables & subites du Baromètre.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	2.	12. s.	33	28.	24	—59	184	E.	ciel serein.
	4.	9. m.		27.	65		164	SE.	c. couvert, brouillard, neige.
	6.	3. m.	42	28.	17	—76	172	E.	c. couvert.
Janv.	7.	9. s.	47	27.	41	+134	165	E. fort.	c. couv. beaucoup de neige.
	9.	8. s.	18	28.	75	—52	162	Ou. fort.	c. serein, ens. couv. & neige.
	10.	2. s.		28.	23		152	Ou. ff.	c. couvert, neige.
	19.	2. s.	46	27.	83	+97	150	SOu.	c. couv. neige, ensuite c. serein.
	21.	12. m.		28.	80		185	SE. Ou.	c. serein.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	9.	12. s.		27. 77		154	NE.	c. couv. enſuite demi-couv
	10.	12. s.	60	28. 32	+110	157	SOu.	c. demi-couvert.
	12.	12. m.		28. 87		174	Ou. calme	brouillard: ciel ſerein.
	13.	12. s.	84	28. 38	−135	165	calme.	c. couvert.
Févr.	14.	12. s.		27. 95		162	Ou.	c. couvert, enſuite neige.
	15.	12. s.		27. 52		163	Ou.	c. couv. neige.
	27	midi		28. 68		186	N. fort	c. ſerein.
	27	minuit	36	28. 50	−168	189	N. fort.	c. demi-couvert, brouillar
	28	minuit	24	27. 00	+105	165	S. ff.	c. couv. beaucoup de neig
	1	minuit		28. 05		190	NOu. ff.	c. ſerein.
	16.	10. m.	20	28. 03	−55	165	calme S.	c. couvert.
	17.	6. m.		27. 48		157	Ou. fort.	c. demi-couv. enſuite neig
Mars.	19.	12. m.		28. 12		162	calme Ou.	c. ſerein.
	19.	12. s.	42	27. 97	−70	170	S. fort.	c. demi-couv. Aurore bor
	20.	12. s.		27. 45		163	SE.	c. ſerein.
	21.	6. m.		27. 42		165	E.	c. couv. enſuite neige.
	31.	12. m.	22	27. 77	−55	155	NOu.	c. ſerein.
	1.	10. m.	38	27. 22	+81	160	N. ff.	c. couvert, neige.
	2.	12. s.		28. 03		155	SE. calme	c. demi-couvert.
	4.	9. m.		27. 72		148	SE.	c. couvert, neige & pluie.
	4.	12. s.	48	27. 97	+85	159	SE. fort.	c. demi-couv. enſuite ſerei
Avril	5.	12. s.		28. 53		165	E.	c. ſerein, brouillard.
	6.	9. m.		28. 57		152	S.	c. ſerein.
	12.	6. m.	24	28. 24	−64	165	calme.	ciel demi-couvert.
	13.	6. m.		27. 60		151	SOu. fort.	c. couv. neige, enſuite plui

Iois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Iai	1.	0. m.	24	28. 48	—50	151	calme.	c. ferein, brouillard.
	1.	12. s.		27. 98		142	S.	c. demi-couvert.
	21.	12. s.	24	27. 60	+49	141	N.	beaucoup de pluie, c. demi-
	22.	12. s.		28. 09		142	Ou. calme	c. ferein. (couvert.
in.	4.	5. m.	30	27. 48	+75	144	N. fort	c. demi-couvert.
	5.	11. m.		28. 23		126	variable	c. ferein.
	25.	12. m.	36	27. 99	—49	128	Ou.	c. demi-couv. enfuite pluie.
	26.	12. s.		27. 50		133	Ou.	c. demi-couvert, pluie.
oût	4.	6. m.	34	27. 67	+57	137	NOu.	c. couv. & beaucoup de pluie.
	5.	4. s.		28. 24		128	Ou.	c. ferein.
pt.	5.	12. s.	33	28. 15	—50	136	NE.	c. demi-couv. enfuite pluie.
	7.	9. m.		27. 65		125	Ou. fort.	c. couv. beaucoup de pluie.
	14.	6. m.	30	28. 30	—59	142	S.	c. couv. Aurore boreale.
	15.	12. m.		27. 71		131	Ou.	pluie, ciel demi-couvert.
	20.	12. s.	27	27. 90	—49	144	SE.	c. couvert.
	22.	3. m.		27. 41		143	Ou.	c. couv. pluie.
	25.	12. s.	21	28. 66	—44	142	SE.	c. couvert. (& des éclairs
	26.	9. s.		27. 22		131	SOu. fort.	c. demi-couv. beauc. de neige
ov.	1.	3. s.	30	27. 51	+66	148	SOu. fort.	c. couv. neige & pluie.
	2.	9. s.		28. 17		155	calme.	c. ferein, Aurore boreale.
	8.	6. m.	36	27. 74	+58	149	SE.	c. demi-couvert, pluie.
	9.	6. s.	18	28. 32	—58	155	SOu. ff.	c. fer. enfuite couv. & neige
	10.	12. m.		27. 74		150	Ou. fort.	c. demi-couvert.
	13.	3. m.		27. 58		149	SOu. fort.	c. couv. pluie, enfuite neige.
	14.	3. m.	48	28. 05	+90	158	NE. fort.	c. couvert.
	15.	3. m.	21	28. 48	—56	165	S.	c. ferein.
	15.	12. s.		27. 92		152	Ou. fort.	c. couvert.

Mois

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Nov.	16.	12. m.	20	27.	92	—76	152	NOu. fort.	c. demi-couv. puis neige &
	17.	10. m.	24	27.	16	+50	148	Ou. fort.	c. couvert. (pluie.
	18.	10. m.		27.	66		152	calme.	c. ſerein, enſuite couv. & neige
	23.	12. m.	27	28.	20	—58	150	NOu. calm.	c. couvert, enſuite pluie.
	24.	3. s.		27.	62		149	SOu. ff.	c. demi-couv. neige & pluie.
Déc.	3.	9. s.	21	28.	12	—49	151	SE.	ciel couvert.
	4.	6. s.	24	27.	63	+49	153	E. fort.	neige & ciel couvert.
	5.	6. s.		28.	12		154	SOu.	c. demi-couvert, puis clair.
	27.	12. s.	32	28.	18	—80	176	S.	c. ſerein, puis couv. & neige.
	29.	8. m.	40	27.	38	+72	164	N. fort.	neige c. couvert, puis ſerein.
	30.	21. s.		28.	10		178	N.	ciel ſerein.

ff. marque, que le vent a été très fort.

Reſumé des obſervations Barométriques.

La plus grande hauteur du Baromètre en 1785 a été obſervée, le 17 Décembre à 1 heure après midi, de 29,04 pouces de Paris. Thermomètre de Délisle 178. Ciel ſerein, vent du Sud.

La plus petite hauteur, le 28 Février à 12 heures du ſoir, de 27,00 pouces. Thermomètre 185. Ciel couvert, beaucoup de neige, vent du Sud très fort.

La variation totale 2,04 pouces, & le milieu 28,02.

La hauteur moyenne 27,958, c'eſt à dire $27\frac{958}{1000}$ pouces.

Le

Le Baromètre a été en cette année

239	jours	15	heures,	au dessus de 27, 80
197	—	9	—	au dessus de 27, 90
148	—	12	—	au dessus de 28, 00
102	—	9	—	au dessus de 28, 10 &
73	—	21	—	au dessus de 28, 20 pouces

D'où nous concluons la hauteur, au dessus de laquelle le Baromètre a été pendant la demi-année ou pendant $182\frac{1}{2}$ jours, égale à 27, 93, qui est de $\frac{28}{1000}$ pouces plus petite que la moyenne.

La descente la plus considérable & la plus subite a été de $1\frac{68}{100}$ pouces en 36 heures, & pendant cet intervalle de temps elle a même été de $1\frac{1}{2}$ pouces en 24 heures, le 27 Février.

Les montées le plus considérables & les plus subites sont; de $1\frac{5}{100}$ pouce en 24 heures le 28 Février, & de $1\frac{34}{100}$ pouce en 47 heures le 7 Janvier.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extrêmes.						Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas			Au plus haut.				Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour	heure.	Degré.	jour	heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	191	21.	7. m.	148	24.	2. s.	43	166,2	159,6
Février	198	19.	6. m.	149	7. 10.	10. s. 2. s.	49	171,3	162,9
Mars	200	3.	6. m.	146	8.	2. s.	54	173,0	159,0
Avril	169	9.	6. m.	137	21.	2. s.	32	156,6	145,8
Mai	155	3.	6. m.	126	15.	2. s.	29	145,8	135,2
Juin	146	3.	10. s.	114	20.	2. s.	32	134,5	126,8
Juillet	134	4. 14.	6. m.	108	23.	2. s.	26.	129,6	121,6
Août	141	30.	6. m.	111	19.	2. s.	30	130,1	119,8
Sept.	152	20.	6. m.	122	5. 8.	2. s.	30	141,5	131,5
Octobr.	158	9.	6. m.	138	25.	2. s.	20	148,3	144,0
Novem.	165	15.	6. m.	145	11.	6. m.	20	153,4	149,3
Décem.	197	32.	9. m.	149	1. 3.	2. s.	48	167,6	162,6

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

Mois.	Froid plus grand que							Chaleur plus grande que						
	190 jours	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.
Janv.	1	6	8	21	31	31	31					6	18	27
Févr.	3	9	13	21	28	28	28					2	14	22
Mars	2	8	16	28	31	31	31					3	21	27
Avril				10	26	30	30				5	28	30	30
Mai					5	31	31			3	23	31	31	31
Juin						7	25		3	18	30	30	30	30
Juillet						19	31	2	11	29	31	31	31	31
Août					2	13	31		20	27	31	31	31	31
Sept.				2	20	29	30			14	29	30	30	30
Oct.				12	31	31	31				5	31	31	31
Nov.			2	25	30	30	30					21	30	30
Déc.	2	3	14	22	31	31	31					3	14	26
1785.	8	26	51	104	191	272	329	2	34	91	154	247	311	346

Nous tirons de ces deux Tableaux les concluſions ſuivantes :

Le plus grand froid, qui ordinairement tombe en Janvier, a été obſervé en cette année le 3 de Mars matin, de 200^{d}. ou ſuivant la diviſion de Réaumur de $26\frac{3}{4}$. Baromètre 28, 33. Ciel ſerein, vent de SOu.

La plus grande chaleur a été de 108^{d}, c'eſt à dire de $22\frac{1}{2}$ ſuivant Réaumur, le 23 Juillet après midi. Baromètre

 27.

27. 85. Ciel ferein, vent de SE. Il y a eu ce même foir un fort orage.

La différence entre ces deux temperatures extrêmes eft par conféquent de 92 degrés de Délisle, qui font à peu près 49 degrés de Réaumur.

Le froid moyen, par lequel je défigne la fomme de toutes les hauteurs thermomètriques obfervées de grand matin & au foir, divifée par leur nombre, a été trouvé:

pour toute l'année, $151\frac{1}{2}$, & felon Réaumur $\frac{3}{4}$ degrés au deffous de o,

pour les fix mois d'hyver, Janv. Févr. Mars, Avril, Novembre & Décembre $164\frac{3}{4}$, & felon Réaumur $7\frac{3}{4}$ degrés au deffous de o,

& pour les fix mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre $138\frac{1}{3}$, & felon Réaumur $6\frac{1}{3}$ degrés au deffus de o.

La chaleur moyenne, ou la fomme de toutes les hauteurs thermométriques obfervées à 2 heures après midi, divifée par leur nombre, a été trouvée:

pour toute l'année, $143\frac{1}{10}$ d. ce qui correfpond à une chaleur de $4\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur,

pour les fix mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Aout, Septembre & Octobre $129\frac{4}{5}$, ou fuivant Réaumur 11 degrés, &

pour les fix mois d'hyver, Janv. Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre $156\frac{1}{2}$, ou fuivant Réaumur 3 degrés au deffous de o.

Il y

Il y a eu cette année 191 jours de gélée, & en 104 jours le froid a ſurpaſſé 160 degrés: parmi ceux-ci ont été trouvés 51, où le froid a été plus grand que 170, & 26 où il a ſurpaſſé 180 degrés, entre leſquels il y avoient enfin 8 où le froid a excedé 190 degrés de Délisle.

Enſuite il y a eu 247 jours de degél, & parmi ceux-ci 154 où la chaleur a été plus grande que 140: en 91 jours la chaleur a ſurpaſſé 130, & en 34 jours, 120 degrés, dont il n'y avoient que 2 jours, où la chaleur a été plus forte que de 110 degrés de Délisle.

Les tables ſuivantes indiqueront ces jours de froid & de chaleur plus en détail.

1. Le froid a été obſervé entre

		jours
190 & 200	le 21 Janvier, le 19. 20. 27 Février, le 2. 3 Mars, & le 30. 31 Décembre - -	8
180 & 190	le 2. 3. 8. 9. 20 Janv. le 13. 18. 21. 25. 26. 28 Févr. le 1. 14. 19. 24. 30. 31 Mars, & le 17 Décembre - - - -	18
170 & 180	le 5. 6 Janv. le 11. 12. 17. 22 Févr. le 4. 13. 15. 16. 18. 23. 25. 26 Mars, & le 14. 15. 16. 21 — 25. 27. 28. 29 Décembre	25
160 & 170	le 1. 4. 7. 10. 14. 15. 16. 22. 23. 27. 28. 29. 31 Janv. le 1. 2. 4. 14. 15. 16. 23. 24 Févr. le 5. 6. 7. 11. 12. 17. 20. 21. 22. 27. 28. 29 Mars, le 1. 2. 5. 6. 9 — 12. 16. 19 Avril, le 14. 15. Nov. & le 6. 9. 11. 13. 18. 19. 20. 26. Décembre -	53
150 & 160	le 11. 12. 13. 17. 18. 19. 24. 25. 26. 30 Janv.	

		jours
	le 3. 5 — 10 Févr. le 8. 9. 10 Mars, le 3. 4. 7. 8. 13. 14. 15. 17. 18. 20. 21. 26 — 30 Avril, le 1. 3. 4. 10. 11 Mai, le 19. 20 Sept. le 5 — 10. 19 — 23. 30 Oct. le 1. 2. 3. 5 — 10. 12. 13. 16 — 19 22 — 29 Nov. & le 1 — 5. 7. 8. 10. 12 Décembre - - - - - -	87

2. La chaleur a été observée entre

		jours
110 & 100	le 22 & 23. Juillet - - - -	2
120 & 110	le 20. 21. 22 Juin, le 18. 19. 21. 24 — 27. 30. 31 Juillet, & le 2. 7. 9 — 26 Août	32
130 & 120	le 15. 23. 25 Mai, le 5 — 12. 17. 18. 19. 23. 25. 26. 29 Juin, le 1 — 13. 16. 17. 20. 28. 29 Juillet, le 1. 3 — 6. 8. 27 Août, & le 1 — 10. 13. 14. 15. 26 Septembre - - - - -	57
140 & 130	le 7. 20 — 23 Avril, le 1. 2. 7. 8. 13. 14. 16 — 22. 24. 26 — 31 Mai, le 1 — 4. 13 — 16. 24. 27. 28. 30 Juin, le 14. 15 Juillet, le 28 — 31 Août, le 11. 12. 16 — 25. 27 — 29 Sept. & le 1. 3. 13. 25. 26 Octobre - - - - -	63
150 & 140	le 11. 12. 19. 24. 25. 26 Janv. le 7. 10 Févr. le 7. 8. 10 Mars, le 2 — 6. 8. 10 — 19. 24 — 30 Avril, le 3 — 6. 9 — 12 Mai, le 30 Sept. le 2. 4 — 12. 14 — 24. 27 — 31 Oct. le 1. 3. 4. 5. 8. 10 — 13. 17 — 24. 26. 27. 29. 30 Novembre, & le 1. 2. 3 Décembre - - - - - -	93

III.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Est.	SE.	Sud.	SOu.	Ouest.	NOu.	Variable.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	3	15	10	3	1	1	5	5	3	7	8	1	
Févr.	2	16	7	3	2	4	3	3	4	4	7	1	
Mars	5	19	6	1	2	0	0	3	2	4	11	6	3
Avril	10	14	5	1	2	0	2	4	3	4	7	6	2
Mai	8	14	9	0	2	3	1	1	5	5	7	6	1
Juin	11	12	5	2	5	4	9	0	2	0	2	6	2
Juillet	13	11	6	1	4	4	5	5	3	1	6	1	2
Août	13	12	6	0	0	3	6	9	3	1	3	6	
Sept.	6	15	9	0	5	2	0	2	1	5	8	7	
Oct.	4	17	8	2	4	0	5	6	6	5	2	3	
Nov.	8	9	11	2	2	1	4	3	5	5	3	6	1
Déc.	1	18	1[illegible]	0	3	0	8	9	2	2	3	4	
Annee 1785.	84	172	94	15	32	22	48	50	39	43	67	53	11

Le mois de Janvier a donc été le plus venteux, & après lui les mois de Février, Novembre & Octobre. Le moins venteux, ou le plus calme se trouve être le mois d'Août, & après lui ceux de Décembre, de Juillet & d'Avril.

Le rapport des quatre plages est pour cette année 1785: Nord, 73: Est, 88: Sud, 88: Ouest, 116. De sorte que le vent dominant a encore été celui de l'Ouest, qui surtout a regné en Mars, Septembre, Mai & Avril.

2.) Di-

2.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	le 25. 27 Fevrier, le 1 Avril, le 4. 30 Juin, le 2 Septembre & le 29 Décembre - -	7
NE.	le 26 Février, le 28. 29 Mai, le 15 Juin, le 5. 7. 11 Juillet, & le 14 Novembre -	8
Eft.	le 6. 7 Janvier, le 20 Février, le 3. 6. 9 Juin, le 6. 27 Juillet, le 20 Août, le 7 Novembre, & le 4. 10 Décembre - - -	12
SE.	le 8. 21 Février, le 27 Mars, le 23 Juillet, le 11 Août, le 14 Octobre & le 12. 13. 28 Decembre - - - - - -	9
Sud.	le 29. 30 Janvier, le 5. 7. 22. 28 Février, le 20 Mars, le 18. 19 Mai, le 26. 28 Août, le 6 Septembre, le 26. 28. 29 Octobre, le 28 Novembre, & le 21 Décembre -	17
SOu.	le 10. 11. 18. 23. 24. 25 Janvier, le 12 Mars, le 13. 24 Avril, le 8. 20 Mai, le 26. 27 Septembre, le 24. 25. 27. 29. 31 Octobre, le 1. 10. 15. 24 Novembre, & le 1. 5 Décembre - - - - - - - -	24
Oueft.	le 9. 20. 28 Janvier, le 9. 17. 25 Mars, le 26. 27 Avril, le 9. 10 Mai, le 2. 3 Août, le 7. 8. 24. 28 Septembre, le 23 Octobre, le 11. 17. 26 Novembre, & le 20 Décembre	21
NOu.	le 1 Mars, le 5 Avril, le 11 Mai, le 14 Juin, le 28 Juillet, le 23 Septembre, le 12. 16. 25 Novembre, & le 18. 19 Décembre -	11

Entre

Direction	Entre ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux du	Nombre de jours.
Nord	25 Février, & du 1 Avril - - - -	2
NE.	du 26 Février, & du 15 Juin - - - -	2
Sud.	du 28 Février, & du 26 Octobre - - -	2
SOu.	du 10. 18. 24 Janvier, 27 Octobre, & du 10. 24 Novembre - - - - - - -	6
NOu.	du 1 Mars, 14 Juin, & du 28 Juillet - -	3

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. copieuſe jours.	Neige. petite jours.	Eau de pluie & de neige Pouces $\frac{1}{100}$	
Janv.	4	16	3		2	2	11	1	17
Févr.	7	15	2		2	1	7	0	83
Mars	8	6	4		1		15	0	57
Avril	12	7	4		7		9	0	85
Mai	6	9	3	4	12	2	1	0	87
Juin	10	11	0	4	13			1	96
Juillet	9	7	0	9	9			1	86
Août	11	4	4	6	9			1	38
Sept.	10	10	1	3	13		2	0	89
Oct.	3	16	4		17		6	0	75
Nov.	0	16	3		10	1	11	0	35
Déc.	7	17	1		0	2	13	0	40
Annee 1785.	87	134	29	26	95	8	75	11	88
				121		83			

Il gréla le 9. 11. Mai, le 10 Juillet, & le 24 Août.

Il y eut 4 orages complets, le 23 Juin, le 23, 25 Juillet & le 24 Août. Il tonnoit de loin le 19 Mai, le 21 Juin, & le 26 Juillet. Il faiſoit des éclairs les nuits du 12 Juin, du 22 Juillet, du 24 Août, du 26 Septembre & du 29 Novembre.

Le nombre des Aurores boreales monte à 14; dont 8 furent fort ſplendides, ſavoir celles du 29 Janvier, 6 Mars, 7 Avril, 9 Août, 8, 14 Septembre, 5 Octobre & du 2 Novembre. Les autres 6 moins remarquables furent obſervées, le 19 Mars, 26 Avril, 11, 12 Septembre, & le 4, 9 Octobre. Le 18 & 19 Avril furent vûs des parhélies d'une grande beauté, le premier ſurtout, dont il a déja été fait mention dans la partie hiſtorique du ſecond volume de ces nouveaux Actes pag. 106.

La Neva debacla dans la nuit du 2 au 3 Mai: Baromètre 27, 65. Thermomètre 152, vent du NOu, ciel demicouvert, & un peu de neige. La riviere avoit été priſe pendant 148 jours: les glaces du lac de Ladoga parurent le 12 Mai, & la riviere ne les charia que 24 heures, jusqu'au 13.

Le 15 Novembre revinrent les glaces, & la riviere les charia presque continuellement pendant 23 jours, en très grande quantité, jusqu'au 8 Décembre, où la Neva fut repriſe par une temperature de 156 à 158 degrés de Délisle. Baromètre 28. 43, vent d'Eſt, ciel couvert. L'intervalle entre la débacle & la priſe a donc été cette année de 223 jours.

Fig. 2.

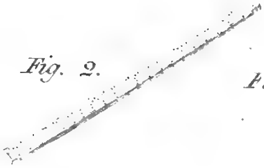


Fig. 3.

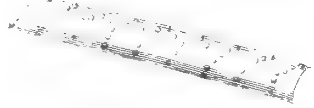


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig 7.

Fig. 9.

Fig. 10.

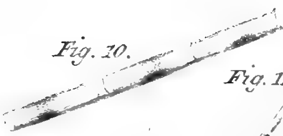


Fig. 11.

Fig. 12.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 8
Fig. 11

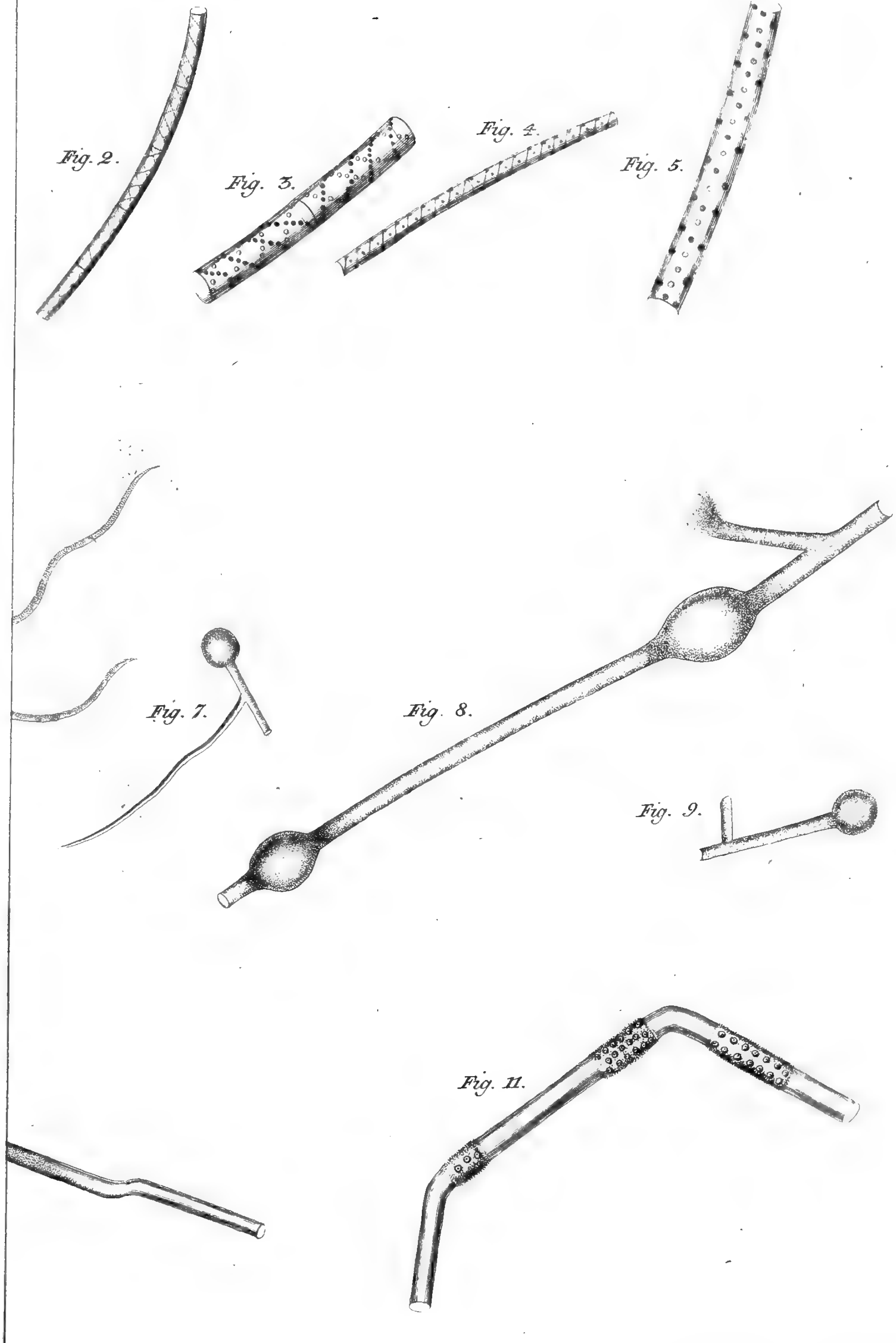


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.

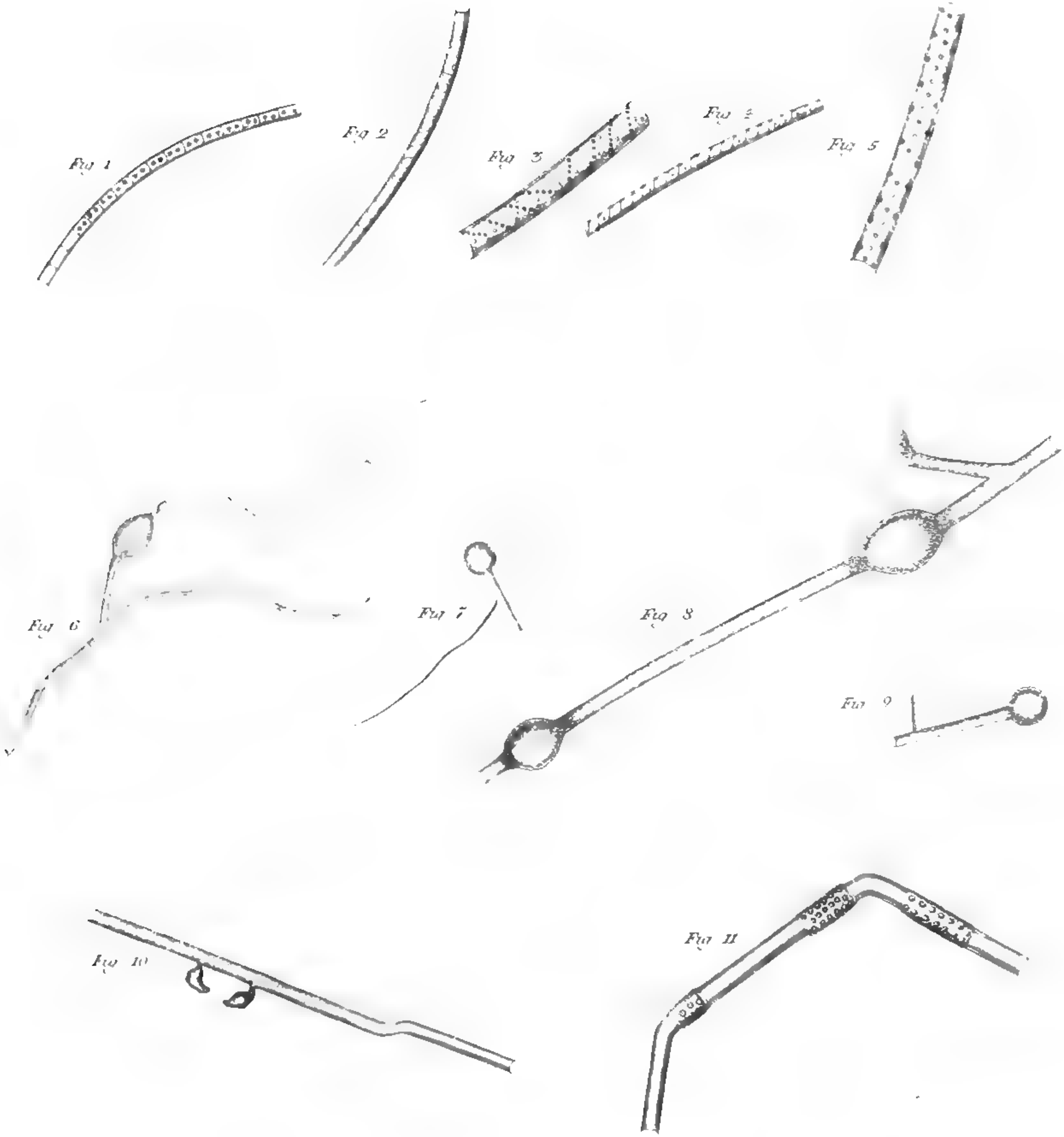


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11

Fig. 2.

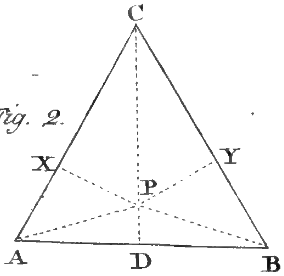


Fig. 3.

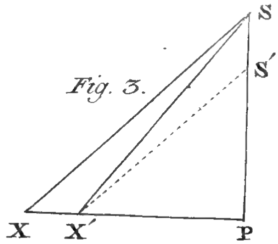


Fig. 6.

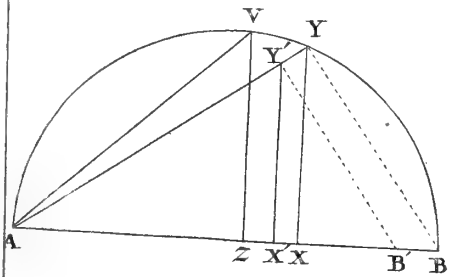


Fig. 5.

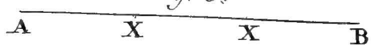


Fig. 7.

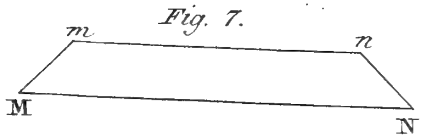
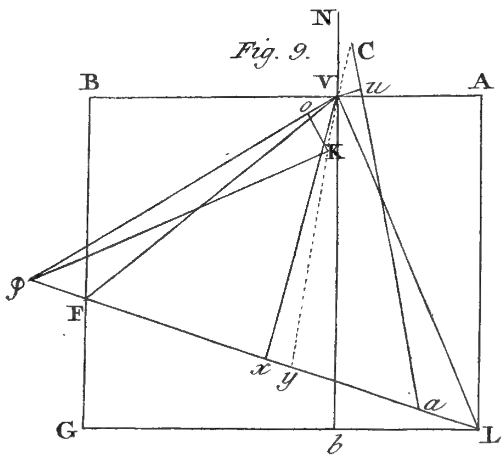


Fig. 9.



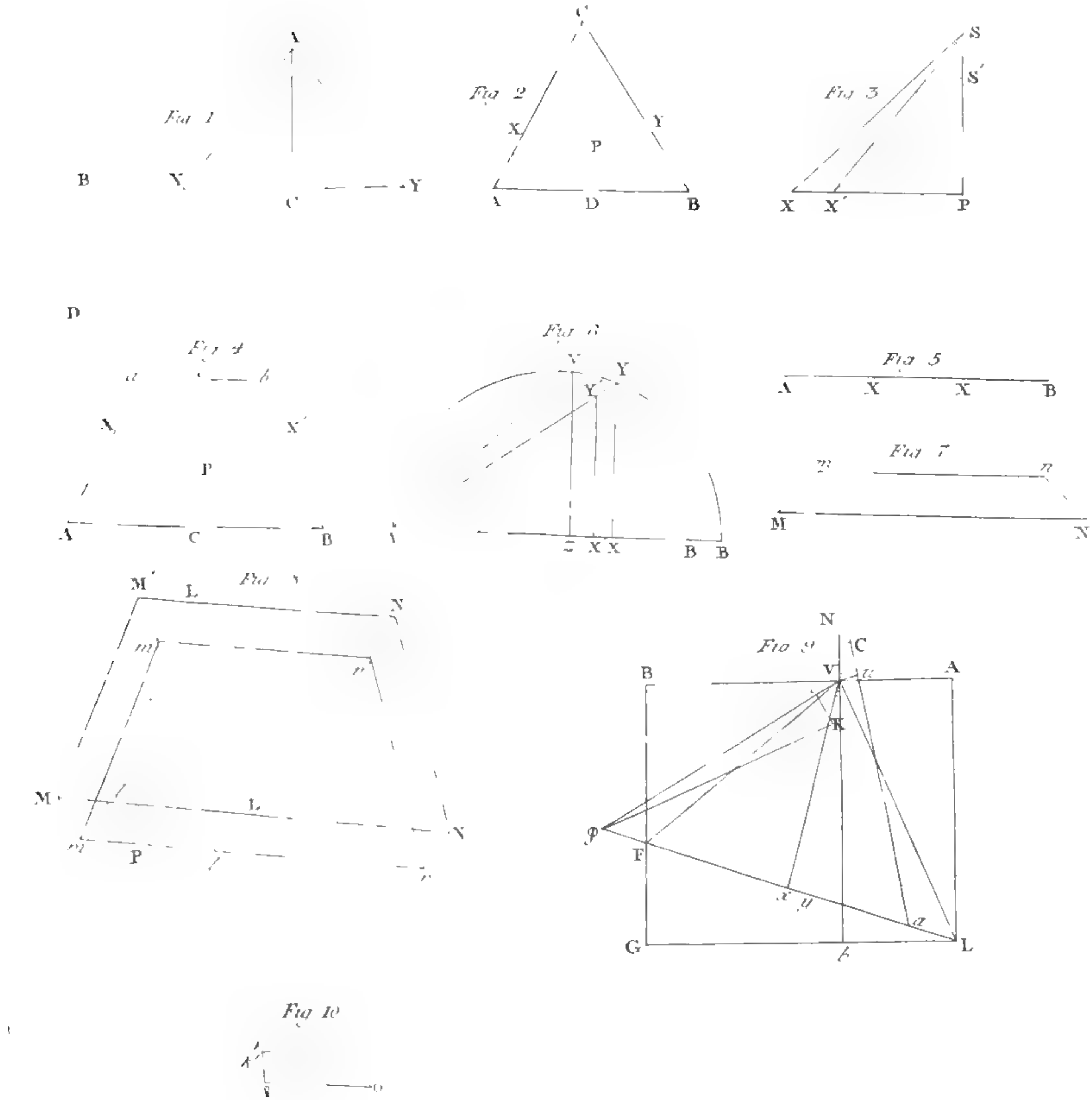
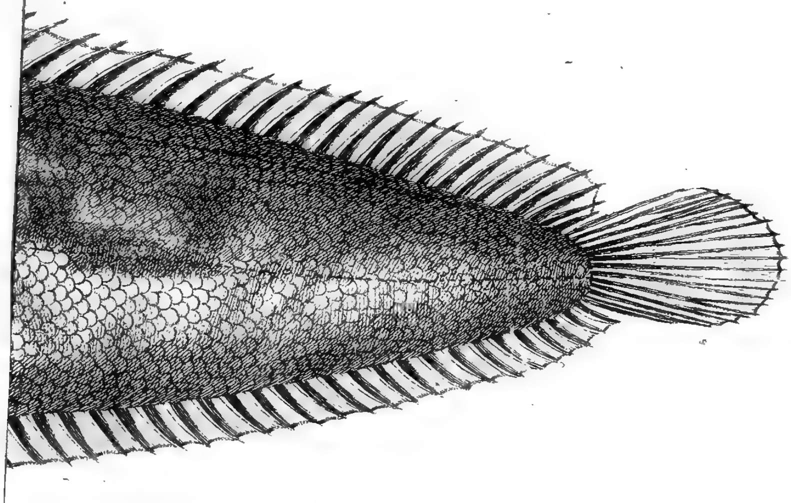
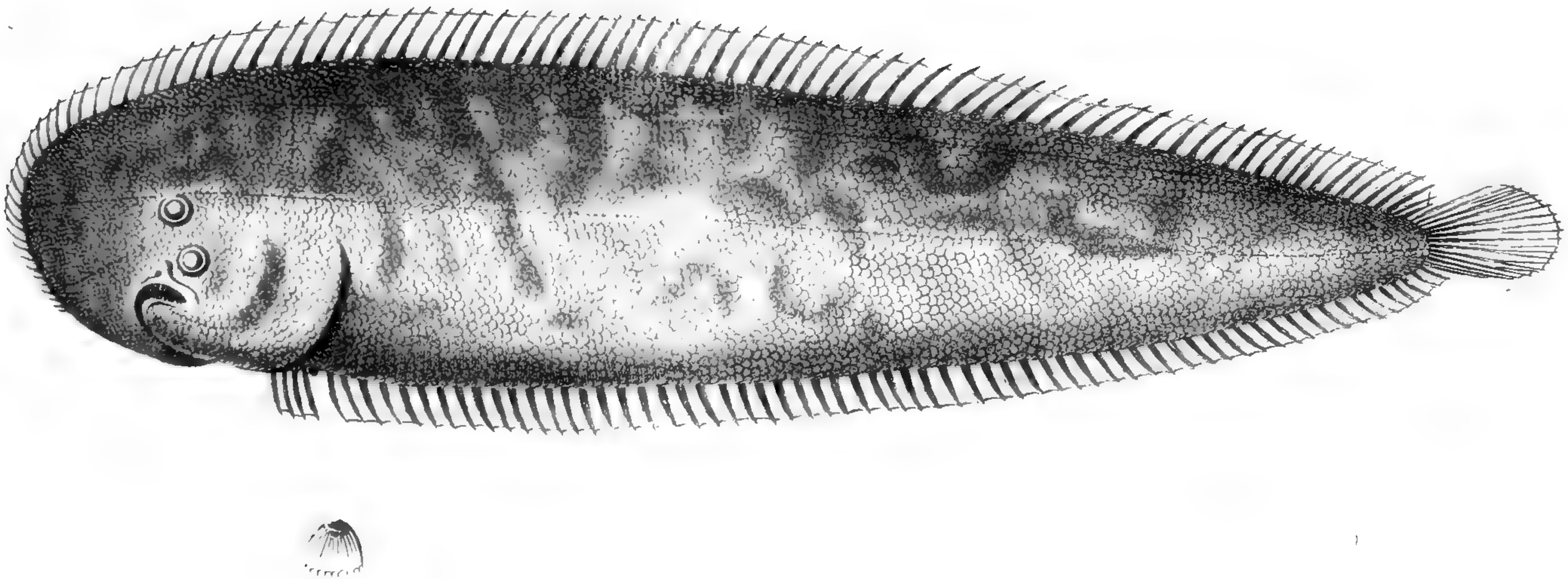
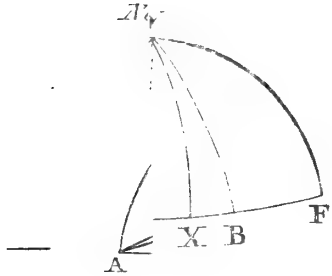


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10

ſtoire de l' Académie pour l' Année 1785. Tom. III. Tab. IV.







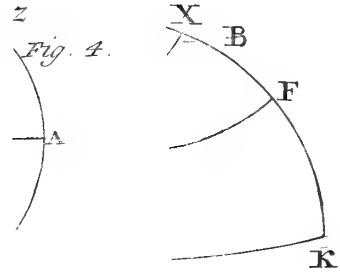
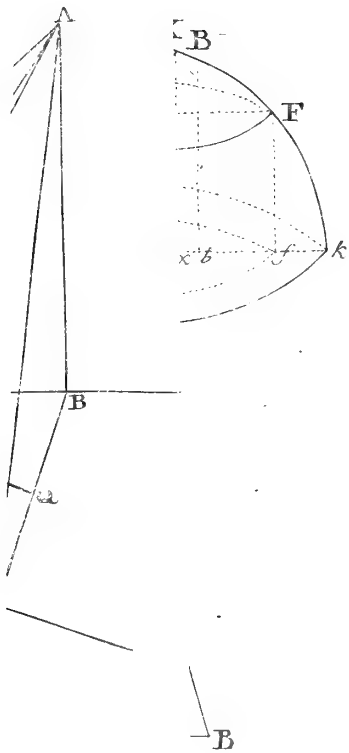


Fig. 4.



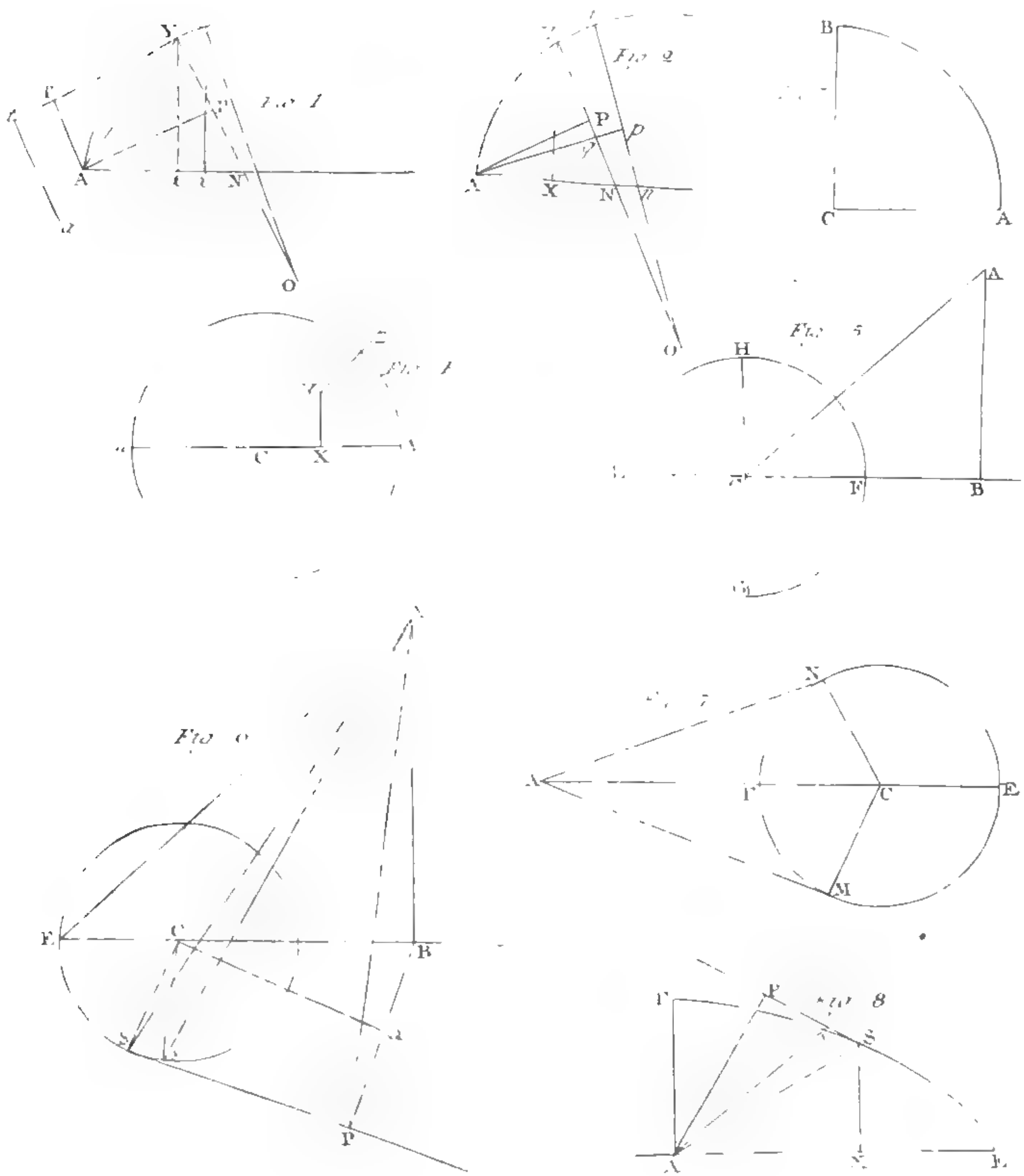


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8

Fig. 2.

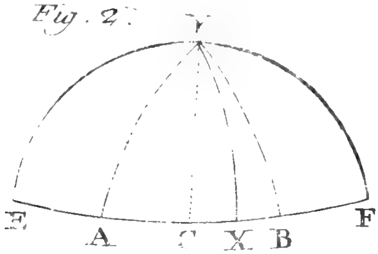


Fig. 4.

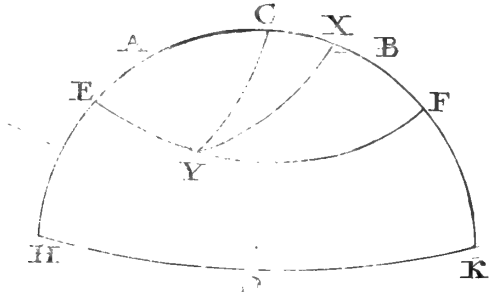


Fig. 6.

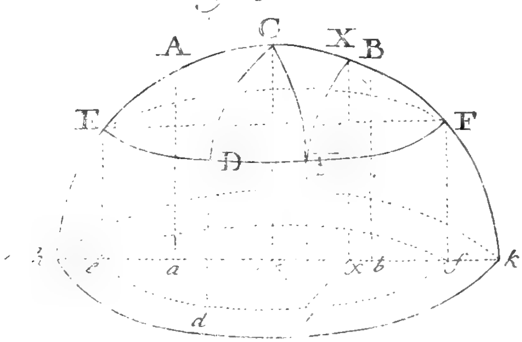


Fig. 3.

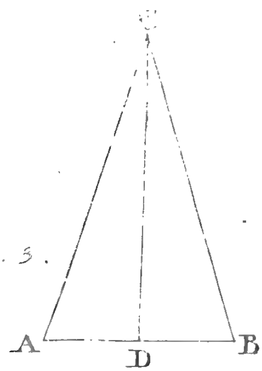


Fig. 1.

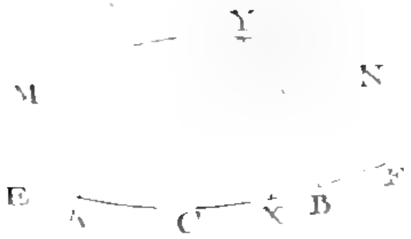


Fig. 2

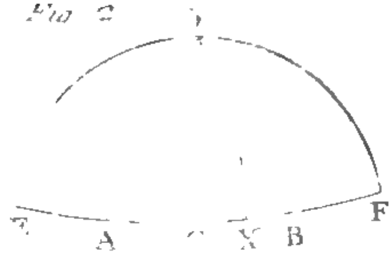


Fig. 3

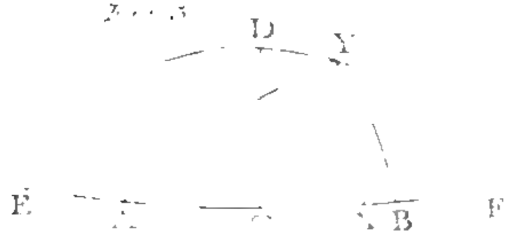
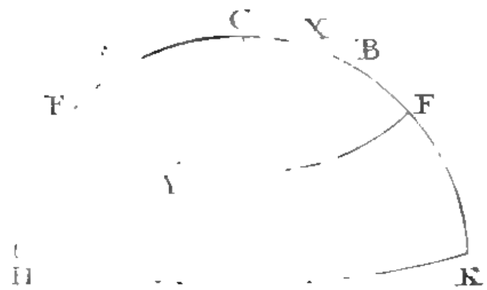
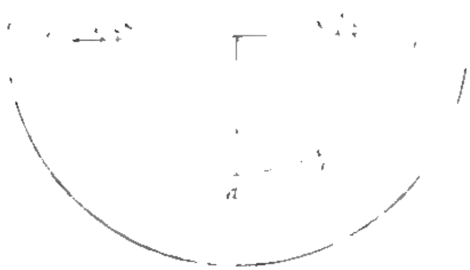


Fig. 4





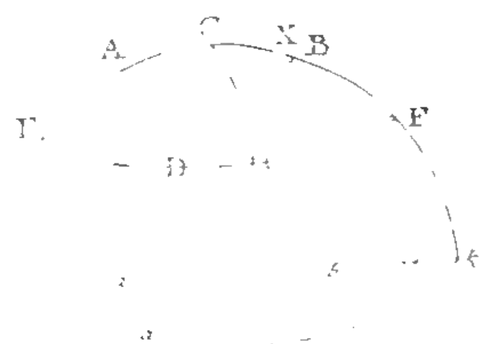
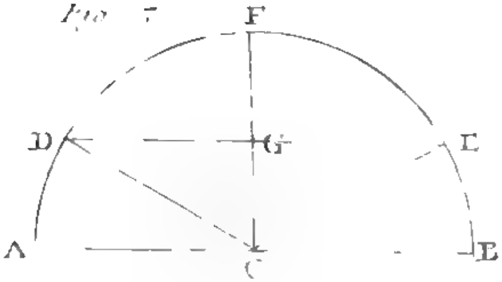


Fig. 7



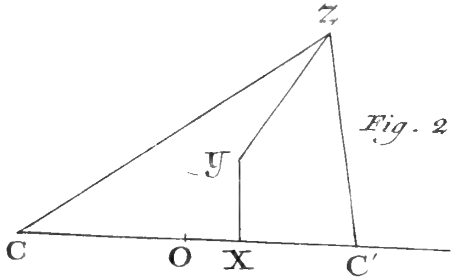
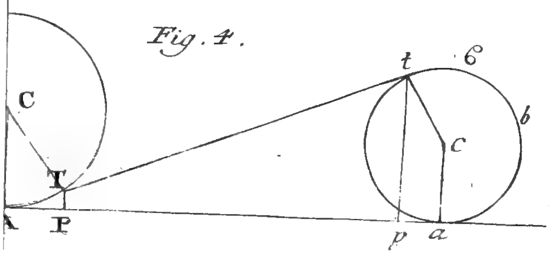


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



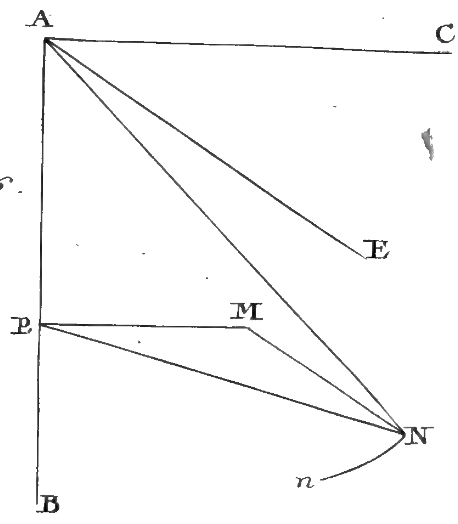
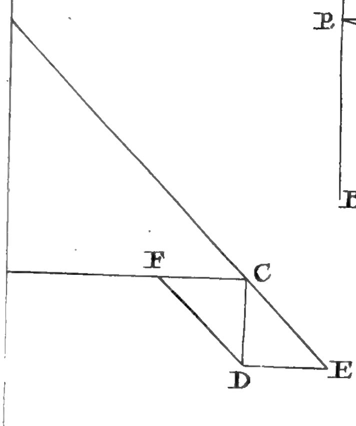
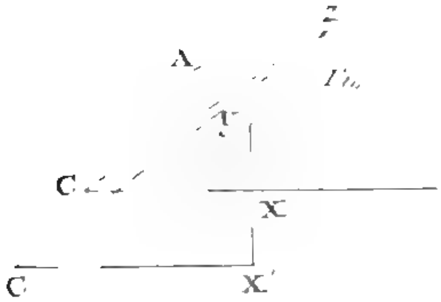


Fig. 6.




Z
A
Fig.
Y
C
X
C
X'

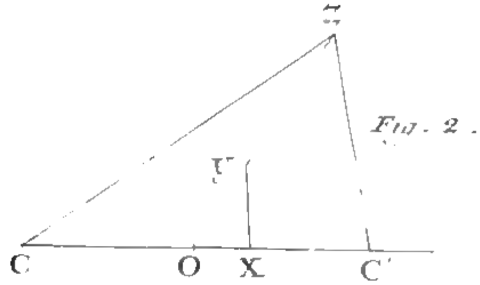
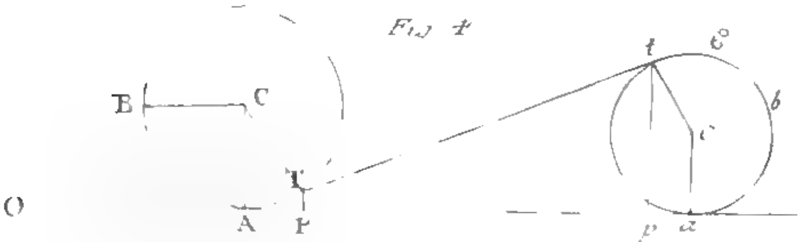
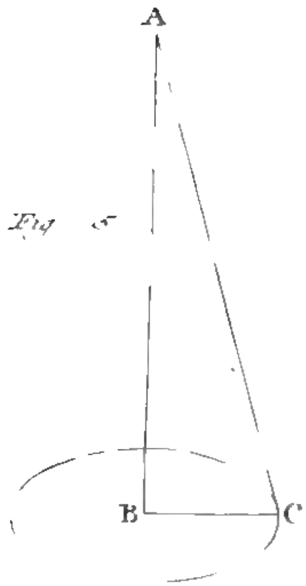

Z
Fig. 2.
Y
C
O
X
C'

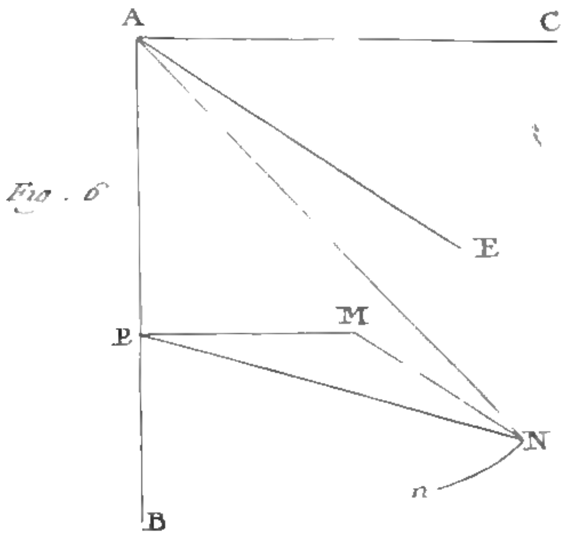
Fig. 3

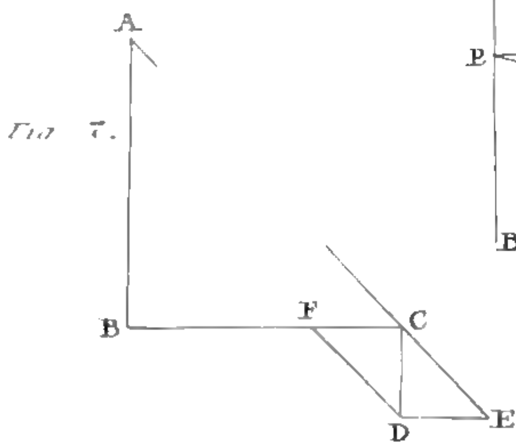

O
A
G
B
C
V

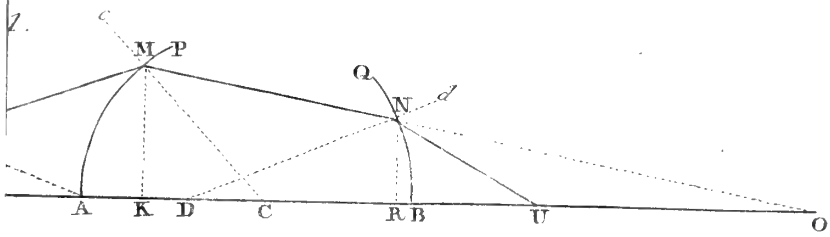
Fig. 4


B
C
O
Y
A
P
t
c°
b
c
p
a


A
Fig. 5
B
C


A
C
Fig. 6
E
P
M
N
n
B


A
Fig. 7.
B
F
C
D
E



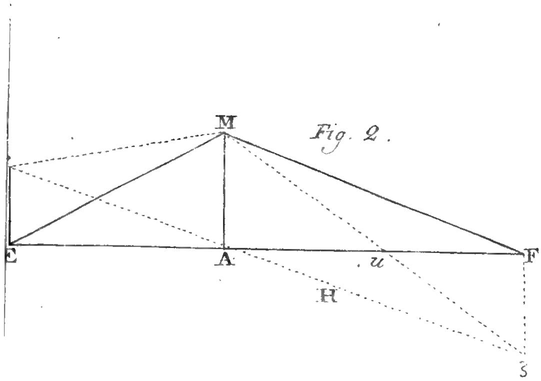


Fig. 2.

Fig. 3.

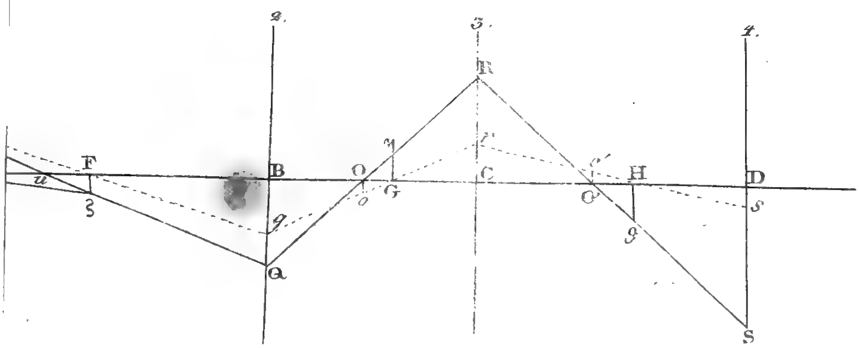


Fig. 4.

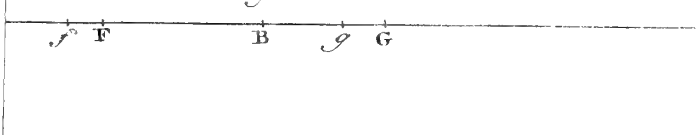


Fig. 1

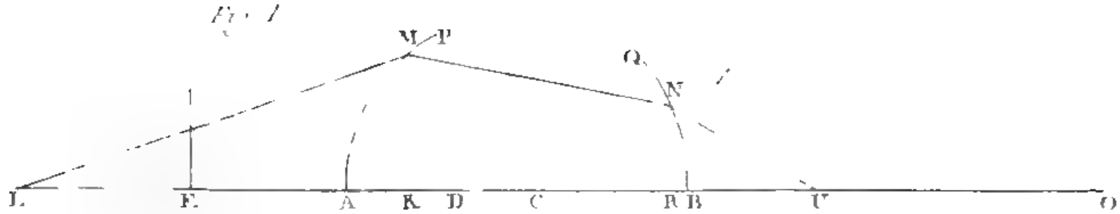


Fig. 2

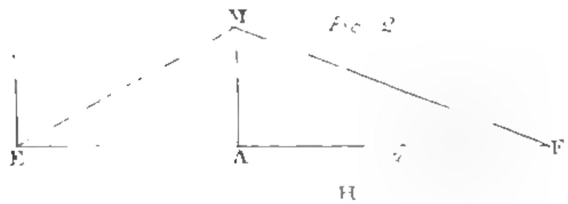


Fig. 3

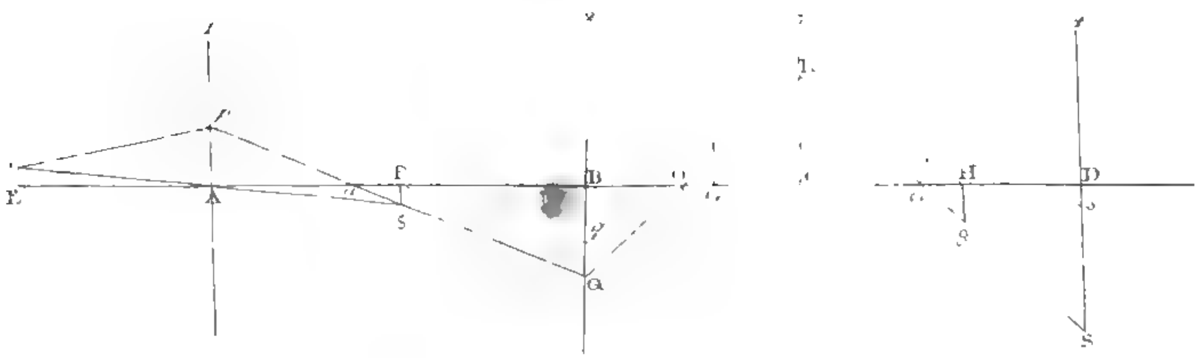
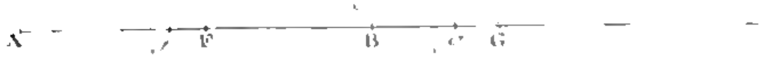


Fig. 4



... latere .

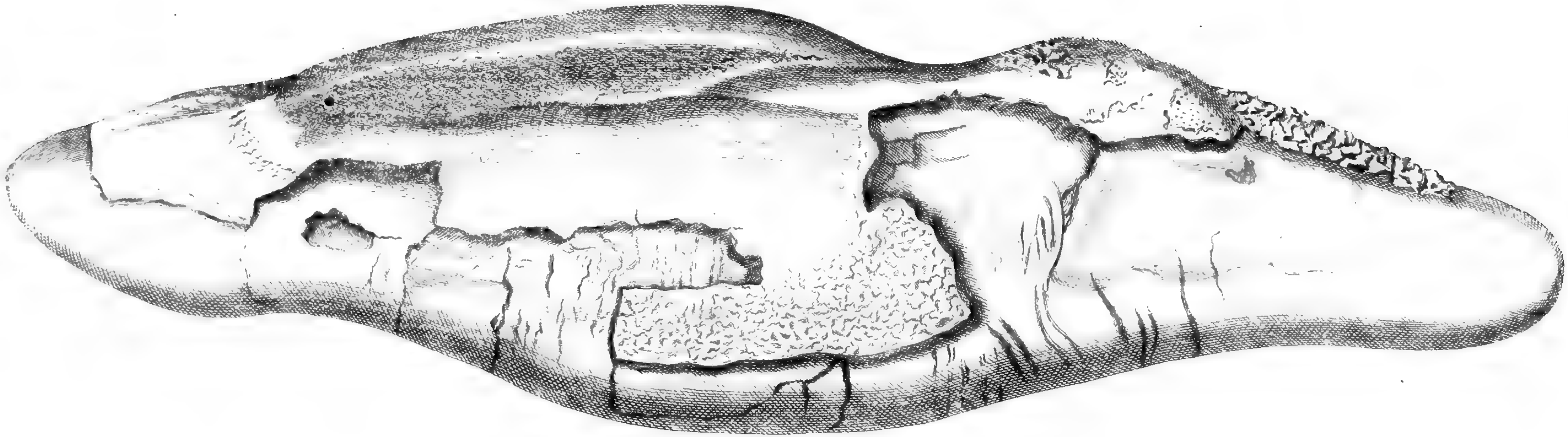
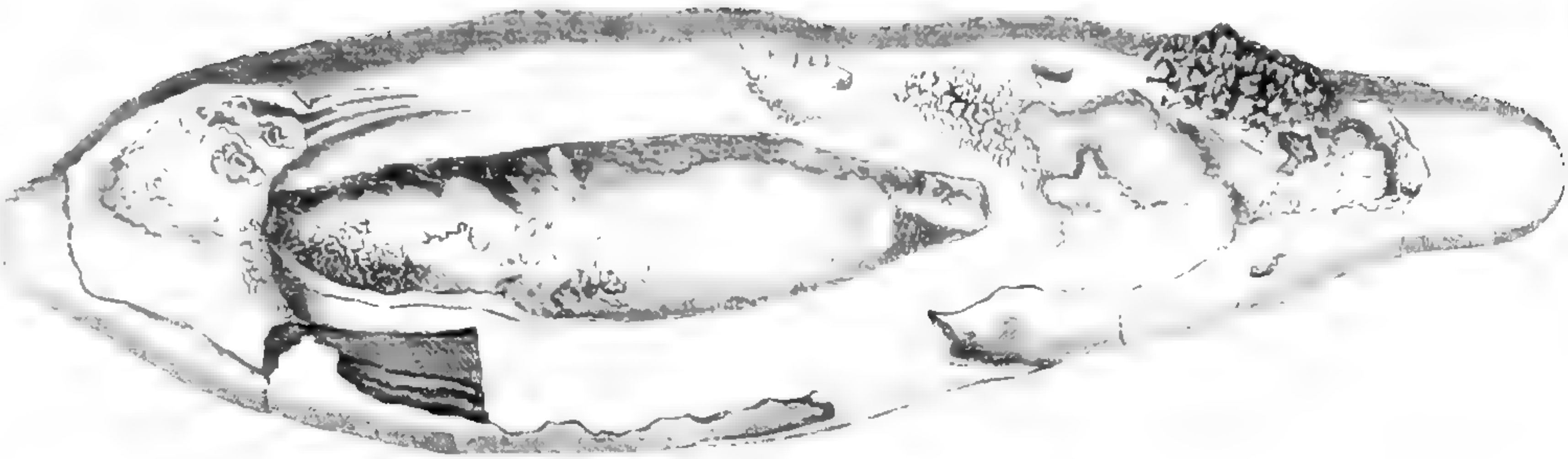
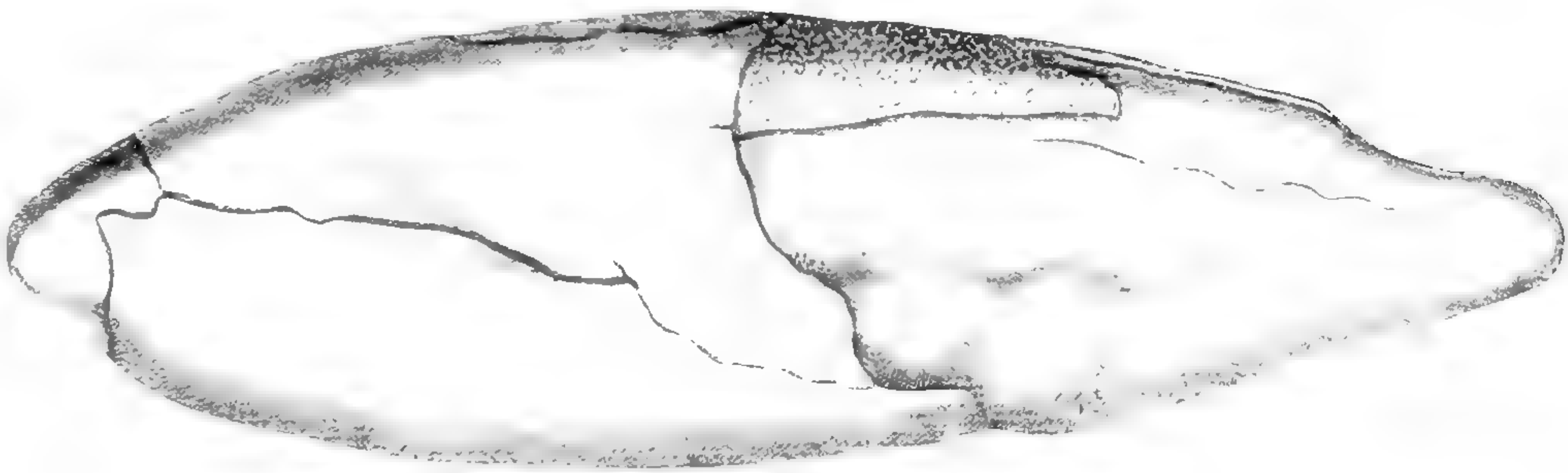


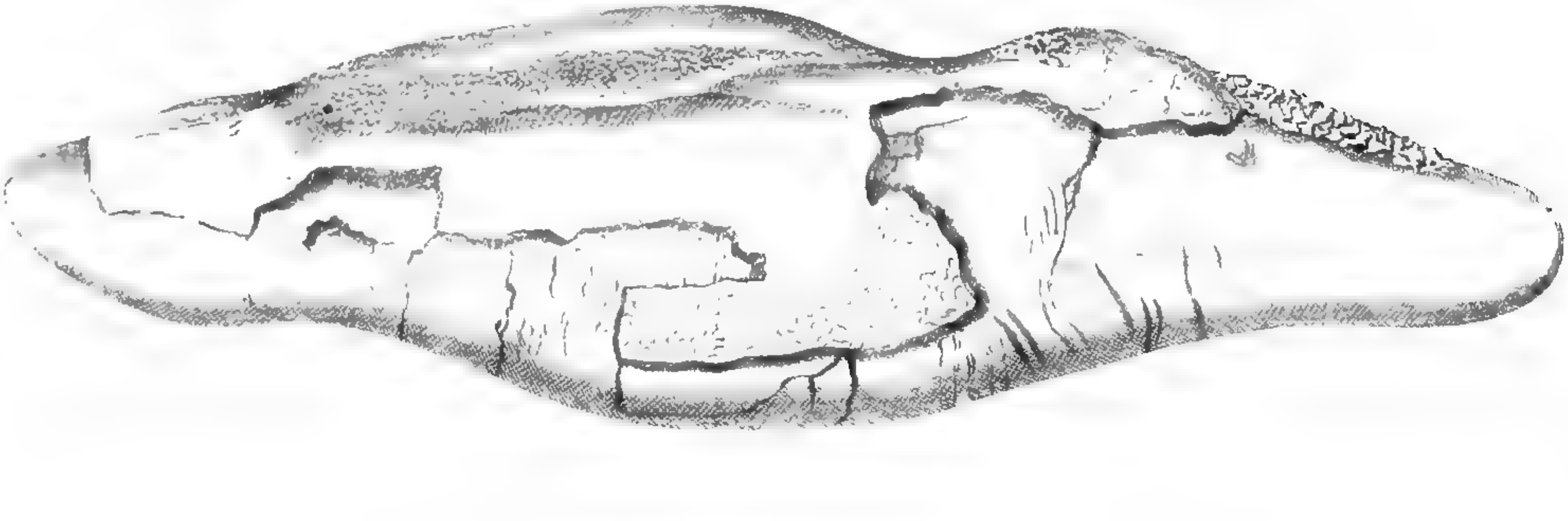
Fig. 1 a superiori.

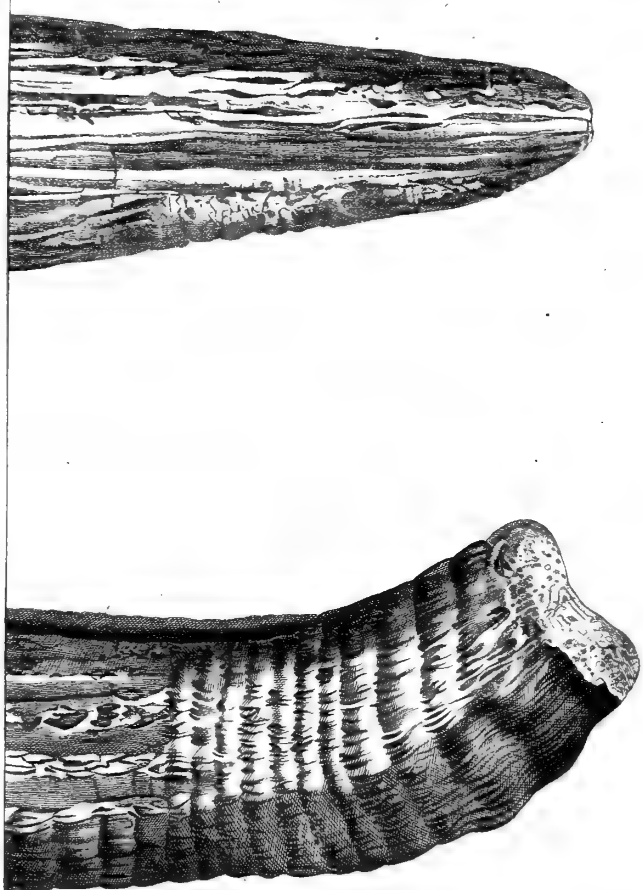


— ab inferiori.



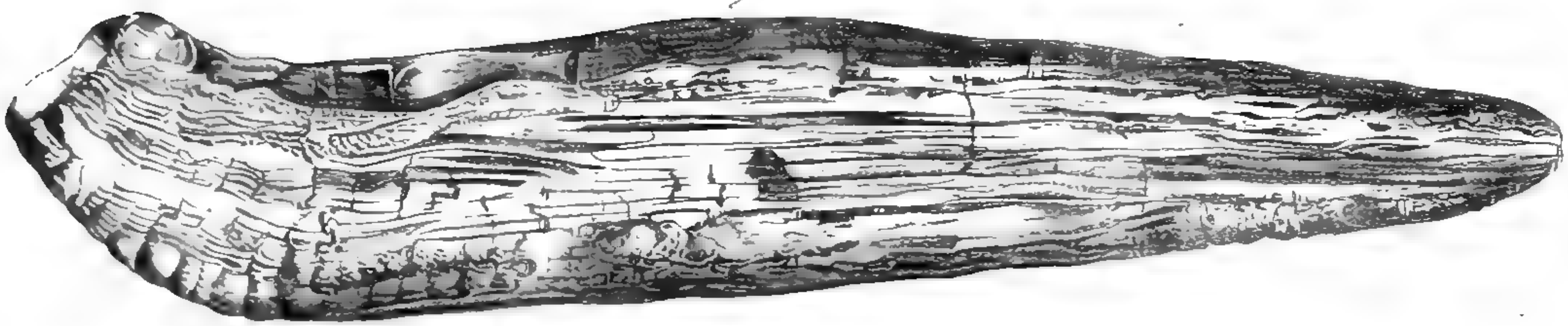
a latere.





Nova Acta Academiae Sc. Petropol. Tom. III. Tab. VI.

Fig. II



Sorex caecutiens pag. 285

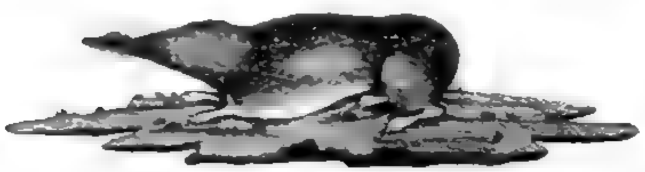
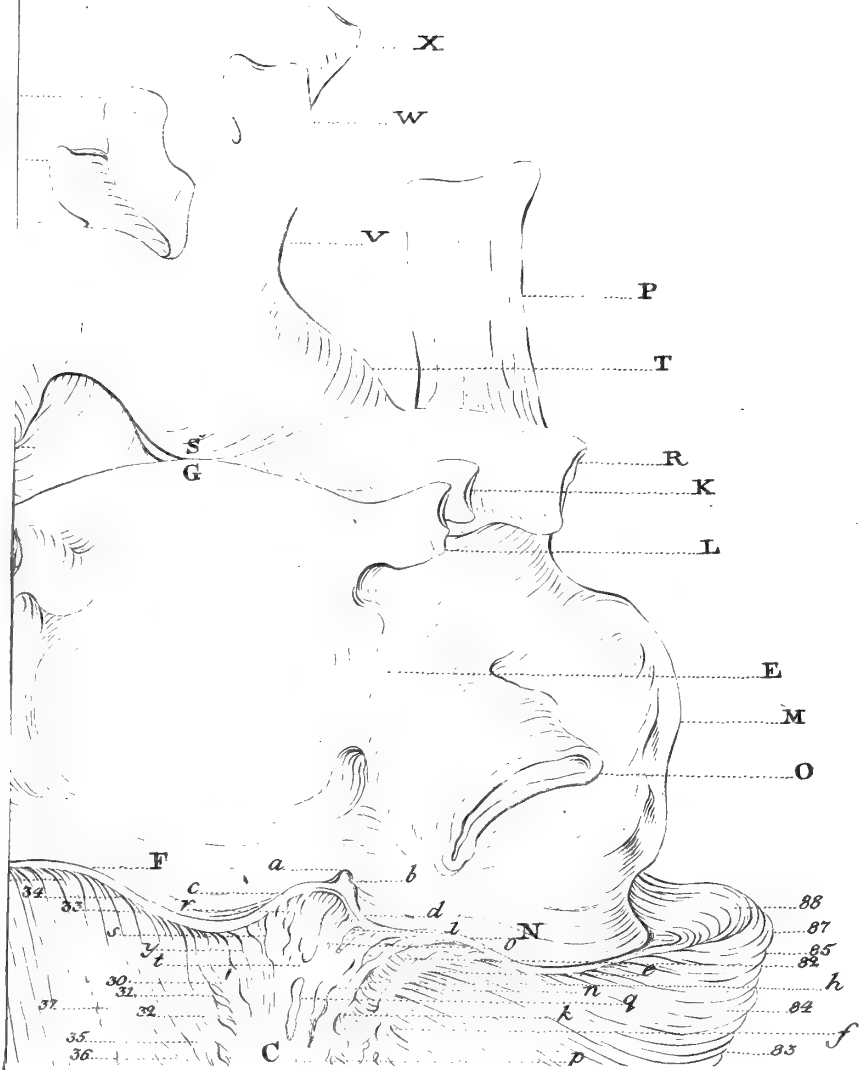


Fig. I.


X
W
V
P
T
S
G
R
K
L
E
M
O
F
a
b
c
r
d
l
N
o
s
y
t
e
n
q
k
p
C
34
33
30
31
32
37
35
36
88
87
85
82
h
84
f
83


X
Y
W
Z
V
P
Q
T
Q
S
G
R
H
K
I
L
D
E
M
O
F
a
b
c
d
N
A
C
B
h
f
g
k
n
q
p
v
l
m